ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

22Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο, 12 Απριλίου 2008 **Ώρα : 11:00 - 14:00**

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

(α) i)Με βάση τον Β΄ νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη Δύναμη ΣF που ασκείται στο σύστημα των δύο σωμάτων Α και Γ είναι ίση με $\Sigma F = m_{\text{ΟΛΙΚΟ}}.a$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι $\Sigma F_y = 0$ άρα $\Sigma F = \Sigma F_X$ οπότε

$F = (m_{\mathrm{A}} + m_{\Gamma}).\alpha$.

Λύνουμε την τελευταία σχέση ως προς α .

$$\alpha = \frac{F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\Gamma}} = \frac{15}{3} \Rightarrow a = 5\frac{m}{s^2}$$

ii) Με εφαρμογή του Β΄ νόμου του Νεύτωνα στο σώμα Α προκύπτει ότι

$\Sigma F_{\mathrm{A}} = m_A.a \Rightarrow \Sigma F_{\mathrm{A}} = 1.5 = 5N$

iii) Το σώμα Α κινείται στο λείο οριζόντιο επίπεδο κάνοντας Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Έτσι, η κίνησή του περιγράφεται από τις πιο κάτω εξισώσεις.

$X_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}.\alpha.t^2$ (1) και $u = a.t$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $X_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}.\alpha.\frac{u^2}{a^2} \Rightarrow X_{\mathrm{A}} = \frac{u^2}{2a}$ (3)

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$X_{\mathrm{A}} = \frac{100}{10} = 10m$$

Άρα το διάστημα που κάλυψε το σώμα Α μέχρι που η ταχύτητά του γίνει ίση με $u = 10\frac{m}{s}$ είναι 10m.

(β) i) Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων Γ και Α μπορεί να βρεθεί από την πιο κάτω εξίσωση:

$\Delta X = X_{\Gamma} - X_{A}$ (1)

$X_{\Gamma} = l + \frac{1}{2}.a.t_1^{\,2} + \frac{1}{2}.a'(t_2 - t_1)^2 + u(t_2 - t_1)$ (2)

$X_{A} = \frac{1}{2}.a.t_1^{\,2} + u(t_2 - t_1)$ (3)

Άρα $\Delta X = l + \frac{1}{2}.a.t_1^{\,2} + \frac{1}{2}.a'(t_2 - t_1)^2 + u(t_2 - t_1) - (\frac{1}{2}.a.t_1^{\,2} + u(t_2 - t_1))$ (4)

Από τη σχέση 4 φαίνεται ότι η επιτάχυνση α΄ του σώματος Γ μετά την αποκοπή του νήματος και η ταχύτητα των σωμάτων την χρονική στιγμή t=5s είναι άγνωστα γι' αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν.

$a' = \frac{F}{m_{\Gamma}} = \frac{15}{2} \Rightarrow \alpha' = 7{,}5\frac{m}{s^2}$ (5)

$u = a.t_1 = 5.5 \Rightarrow u = 25\frac{m}{s}$ (6)

Απλοποιούμε τη σχέση (4) οπότε :

$\Delta X = l + \cancel{\frac{1}{2}.a.t_1^{\,2}} + \frac{1}{2}.a'(t_2 - t_1)^2 + \cancel{u(t_2 - t_1)} - (\cancel{\frac{1}{2}.a.t_1^{\,2}} + \cancel{u(t_2 - t_1)})$

$\Delta X = l + \frac{1}{2}.a'(t_2 - t_1)^2$ (7)

Αντικαθιστούμε τις (5) και (6) στην τελική σχέση, σχέση (7) και βρίσκουμε το διάστημα ΔΧ

$\Delta X = l + \frac{1}{2}.a'(t_2 - t_1)^2 = 0{,}5 + \frac{1}{2}.7{,}5.16 \Rightarrow \Delta X = 60{,}5m$

ii) Επειδή το σώμα Α από το 5s μέχρι και το 9s κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αφού $\Sigma F = 0$ η ταχύτητα του στο 9^0 δευτερόλεπτο της κίνησής του θα είναι όση και στο 5^0 δευτερόλεπτο , δηλαδή:

$u_{A} = 25\frac{m}{s}$ ενώ η ταχύτητα του Γ επειδή στο πιο πάνω χρονικό διάστημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση α΄ και αρχική ταχύτητα $u = 25\frac{m}{s}$ θα είναι:

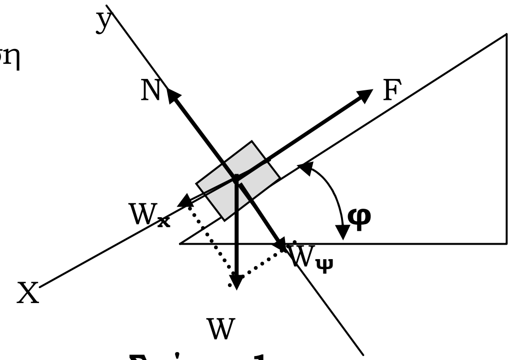
$u_{B} = u + \alpha'.(t_2 - t_1) = 25 + 7{,}5.4 \Rightarrow u_{B} = 55\frac{m}{s}$

ΘΕΜΑ 2^0

(α) Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του σώματος Σ αναλύουμε τη Δύναμη του Βάρους όπως στο σχήμα 1.

$\Sigma F_y = 0$ (1)

$\Sigma F_X = m.a_1$ (2)



Σχήμα 1

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$F - W_X = m.a_1 \Rightarrow F - W.\eta\mu\phi = m.a_1$

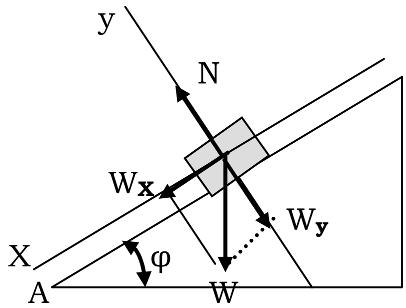
$\Rightarrow a_1 = \dfrac{F - W.\eta\mu\phi}{m}$ (3)

Αντικαθιστούμε στη σχέση (3) και προκύπτει ότι:

$a_1 = \dfrac{6{,}5 - 5.0{,}5}{0{,}5} = 8\dfrac{m}{s^2}$ (4)

Άρα η επιτάχυνση του σώματος κατά το χρονικό διάστημα από $t_1 = 0s$ μέχρι και $t_2 = 0{,}5s$ είναι $8 m/s^2$

(β)Για να υπολογίσουμε την επιβράδυνση του σώματος Σ όταν μηδενιστεί η δύναμη αναλύουμε τη δύναμη του Βάρους όπως στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Από το σχήμα 2 προκύπτουν:

$\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_X = W_X \rightarrow \cancel{m}.a_2 = \cancel{m}.g.\eta\mu\phi$ (5)

Από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $a_2 = 10.0{,}5 = 5\dfrac{m}{s^2}$ (6)

Για να μπορεί το σώμα Σ να επανέλθει πίσω στο Α και να μην διαφεύγει από το κεκλιμένο επίπεδο, θα πρέπει η ταχύτητά του να μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου Για να είναι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ελάχιστο θα πρέπει το σημείο μηδενισμού της ταχύτητας να είναι το ανώτατο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου. Υποθέτουμε ότι το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5s$ βρισκόταν στη θέση X_1 του κεκλιμένου επιπέδου κινούμενο με ταχύτητα u_1,οπότε και η δύναμη που ασκείται πάνω του μηδενίζεται, ενώ για να φτάσει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου κινείται κάνοντας ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση από το σημείο αυτό για χρόνο t_2 καλύπτοντας απόσταση X_2.

Οπότε το συνολικό μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι: $X = X_1 + X_2$ (7)
Υπολογίζουμε την ταχύτητα u_1 που έχει το σώμα Σ τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5s$. Οπότε, $u_1 = a_1.t_1 = 8.0,5 = 4\frac{m}{s}$ (8)

Ονομάζουμε την ταχύτητα του σώματος στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου u_2 οπότε ισχύει η σχέση:

$u_2 = u_1 - a_2.t_2$ (9) $\Rightarrow 0 = 4 - 5.t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{5}s = 0,8s$ (10)

$\Rightarrow$ (7) $X = \frac{1}{2}.a_1.t_1^2 + u_1.t_2 - \frac{1}{2}.a_2.t_2^2$ (11) άρα

$X = \frac{1}{2}.8.(0,5)^2 + 4.(0,8) - \frac{1}{2}.5.(0,8)^2 = 2,6m$ (12)

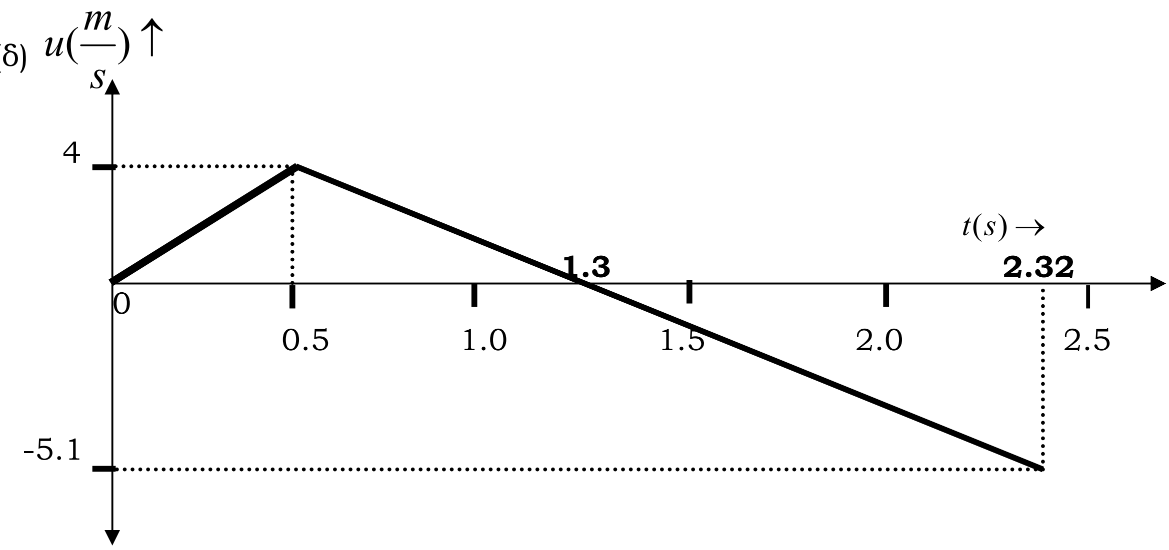
Άρα το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι 2.6m.
(γ) Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν βρεθεί ξανά στο σημείο Α χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (13) και (14). Το σώμα Σ κινούμενο από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση a_2 και αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν.
Υποθέτουμε ότι για να κινηθεί από την κορυφή του επιπέδου μέχρι το σημείο Α χρειάζεται χρόνο t_3 ,ενώ όταν φτάνει στο σημείο Α έχει ταχύτητα u_3.

$X = \frac{1}{2}.a_2.t_3^2$ (13) $\quad u_3 = a_2.t_3$ (14)

Άρα από την (13) προκύπτει ότι $2,6 = \frac{1}{2}.5.t_3^2 \Rightarrow t_3 = 1,02s$

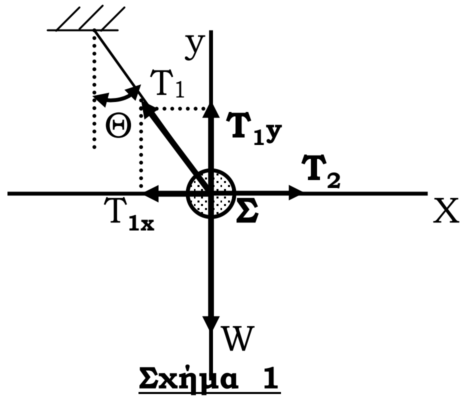
Από την (14) $u_3 = 5.1,02 = 5,1\frac{m}{s}$ (15)

(δ)



ΘΕΜΑ 3ο

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ φαίνονται στο σχήμα 1 που ακολουθεί:



Σχήμα 1

Το σώμα Σ ισορροπεί. Έτσι, με βάση το Α' νόμο του Νεύτωνα
$\Sigma F = 0$ άρα $\Sigma F_X = 0$ (1) και $\Sigma F_y = 0$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) και το σχήμα 1 προκύπτουν οι πιο κάτω ισότητες:

$T_{1y} - W = 0$ και $T_2 - T_{1x} = 0$ (3)

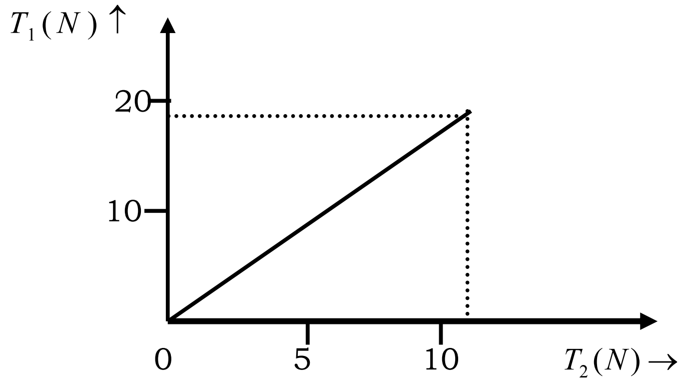
Άρα $T_{1y} - W = 0 \Rightarrow T_1.\sigma\upsilon\nu\theta = W$ και $T_1 = \dfrac{W}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \mathrm{T}_1 = \dfrac{15}{\sigma\upsilon\nu 37^0} = 18{,}78\mathrm{N}$

και $T_2 - T_{1x} = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1.\eta\mu\theta = 18{,}78.\eta\mu 37^0 \Rightarrow \mathrm{T}_2 = 11{,}3\mathrm{N}$

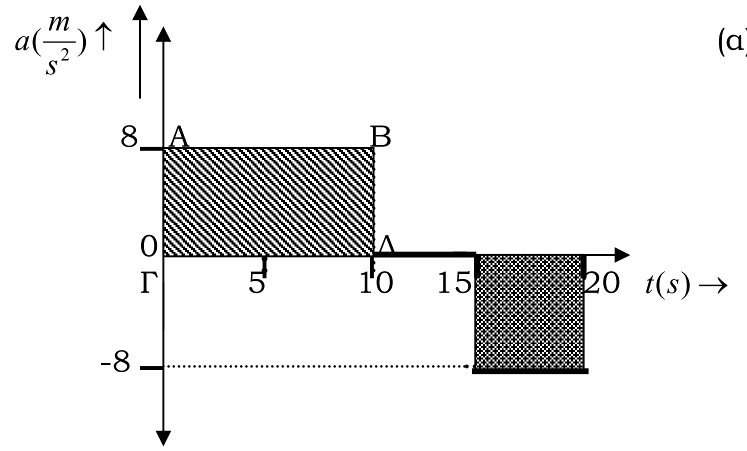
(β) Από τη σχέση (2) προκύπτει η μάζα m που μπορεί να έχει το σώμα Σ έτσι ώστε ότι το νήμα N_1 (του οποίου η Τάση T_1 είναι μεγαλύτερη από την Τάση T_2 του νήματος N_2) να έχει T_{1max}=20N

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1.\sigma\upsilon\nu\theta = W_{1\max}$ άρα $20.\sigma\upsilon\nu 37^0 = m_{1\max}.10 \Rightarrow m_{1\max} = 1{,}60Kg$

(γ) Η γραφική παράσταση της T_1 και της T_2 καθώς το βάρος μεταβάλλεται από 0-15N φαίνεται πιο κάτω:



ΘΕΜΑ 4ο



(α) Είναι γνωστό ότι το Εμβαδόν Ε που προκύπτει από τη γραφική παράσταση και τον άξονα του χρόνου μας δίνει τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα που εξετάζουμε.

$$\Delta u = E \Rightarrow u_{20} - u_0 = 8.10 - 8.5 \Rightarrow 0 - u_0 = 40\frac{m}{s} \ (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι $u_0 = -40\frac{m}{s}$

Άρα η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι $-40\frac{m}{s}$.

(β) Το μέτρο της μέσης διανυσματικής ταχύτητας βρίσκεται αν διαιρέσουμε τη μετατόπιση του σώματος δια το συνολικό χρόνο.

$$U_{\text{ΜΕΣΗ}} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{300}{20} \Rightarrow U_{\text{ΜΕΣΗ}} = 15\frac{m}{s} \ (2)$$

Η μετατόπιση ΔΧ υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση $u = f(t)$.

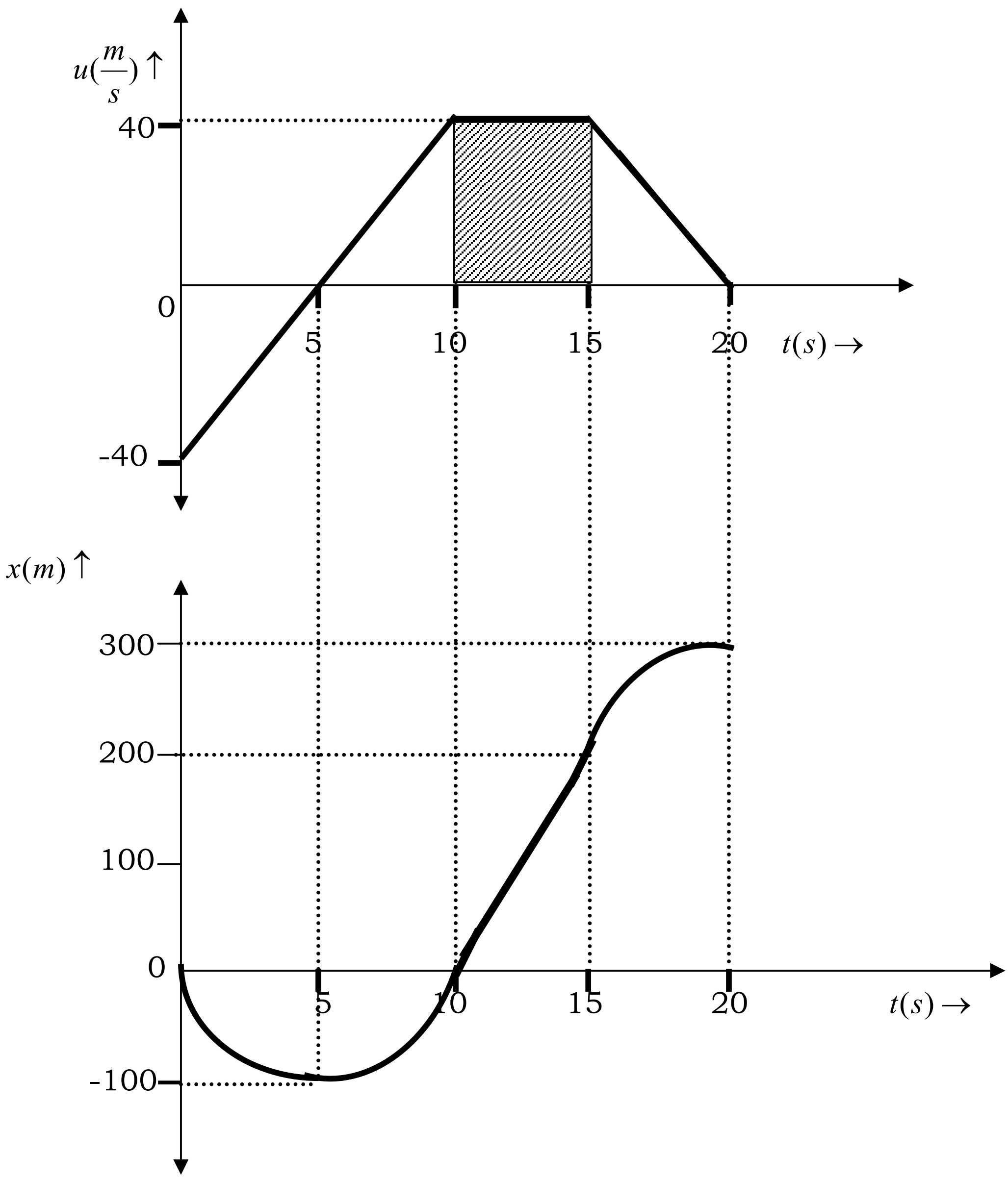
(γ) Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της $u = f(t)$ θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο 10ο δευτερόλεπτο της κίνησής του, η οποία ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και φορά μέχρι το 15ο δευτερόλεπτο της κίνησής του, επειδή το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (α=0). Έτσι αν συμβολίσουμε την ταχύτητα αυτή σαν u_{10} τότε:

$$u_{10} - u_0 = E(\text{ΑΒΓΔ}) \Rightarrow u_{10} + 40 = 80 \ (3)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει η ταχύτητα του σώματος στο 10ο δευτερόλεπτο της κίνησής του.

$$u_{10} = 40\frac{m}{s} \ (4)$$

Η μετατόπιση ΔΧ για τις διάφορες χρονικές στιγμές βρίσκεται από το Εμβαδόν του διαγράμματος $u = f(t)$ και του άξονα του χρόνου.

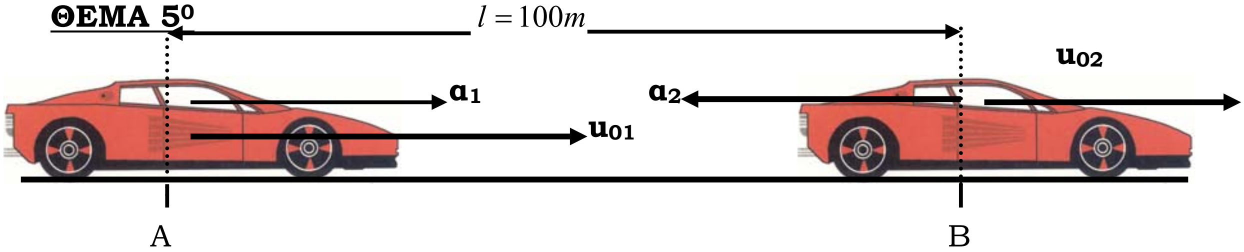


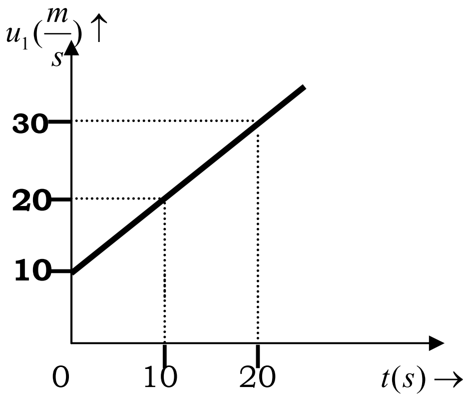
(δ) i)Η Συνισταμένη Δύναμη είναι μηδέν από το 10^{0} δευτερόλεπτο μέχρι και το 15^{0} δευτερόλεπτο διότι $u = σταθερό, α = 0 \Rightarrow \Sigma F = 0$ (Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα)

ii) Από το 5^{0} δευτερόλεπτο μέχρι και το 10^{0} δευτερόλεπτο η ταχύτητα έχει την ίδια φορά με την επιτάχυνση (είναι ομόρροπες).Η επιτάχυνση έχει πάντα την ίδια φορά με τη συνισταμένη δύναμη (Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα), έτσι στο πιο πάνω χρονικό διάστημα η Συνισταμένη Δύναμη και η Ταχύτητα έχουν την ίδια φορά (θετική).

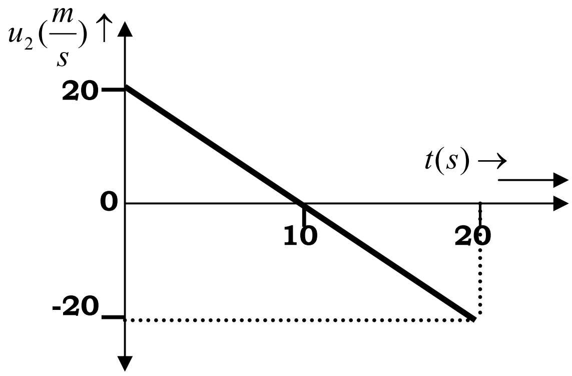
iii) Στα χρονικά διαστήματα από 0s-5s και από 15s-20s η επιτάχυνση (άρα και η δύναμη) έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα.

ΘΕΜΑ 5ο





Μοντέλο Α



Μοντέλο Β

(α) Υποθέτουμε ότι τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων θα συναντηθούν δεξιότερα του Β κάποια χρονική στιγμή t.
Έτσι, κατά τη στιγμή της συνάντησής τους, το μοντέλο αυτοκινήτου Α θα έχει μετατοπιστεί κατά X_1 ενώ το μοντέλο αυτοκινήτου Β θα έχει μετατοπιστεί κατά X_2. Η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις X_1 και X_2 τη χρονική στιγμή της συνάντησης είναι:

$X_1 = l + X_2$ (1) άρα,

$$\Rightarrow (1)\quad u_{01}.t + \frac{1}{2}.a_1.t^2 = l + u_{02}.t - \frac{1}{2}.a_2.t^2 \quad (2)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις $u = f(t)$ των δύο μοντέλων αυτοκινήτων προκύπτουν οι αρχικές ταχύτητες και οι επιταχύνσεις τους.

$$u_{01} = 10\frac{m}{s} \quad \text{και} \quad u_{02} = 20\frac{m}{s} \quad (3)$$

$$a_1 = \frac{\Delta u_1}{\Delta t_1} = \frac{20-10}{10-0} \Rightarrow a_1 = 1\frac{m}{s^2} \quad \text{και} \quad a_2 = \frac{\Delta u_2}{\Delta t_2} = \frac{0-20}{10-0} \Rightarrow a_2 = -2\frac{m}{s^2} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρίσκουμε από τις εξισώσεις (3) και (4) στην (2) προκύπτει ότι:

$$10t + \frac{1}{2}.1.t^2 = 100 + 20t - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}.t^2 \quad (5)$$

$1{,}5.t^2 - 10.t - 100 = 0$ (6) $\Rightarrow t = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+600}}{3}$ (7)

Οι δύο λύσεις της εξίσωσης (7) είναι $t_1 = 12{,}15s$ (Δεκτή) και $\cancel{t_2 = -5{,}48s}$ που είναι αρνητική και απορρίπτεται.

(β) Αντικαθιστούμε το χρόνο $t_1 = 12{,}15s$ στην εξίσωση κίνησης του μοντέλου αυτοκινήτου Α για να βρούμε την απόσταση που θα απέχει το σημείο συνάντησης των δύο αυτοκινήτων από το Α.

$X_1 = u_{01}.t + \dfrac{1}{2}.a_1.t^2 \Rightarrow X_1 = 10.12{,}15 + \dfrac{1}{2}.1.(12{,}15)^2 = 195{,}31m$ (8)

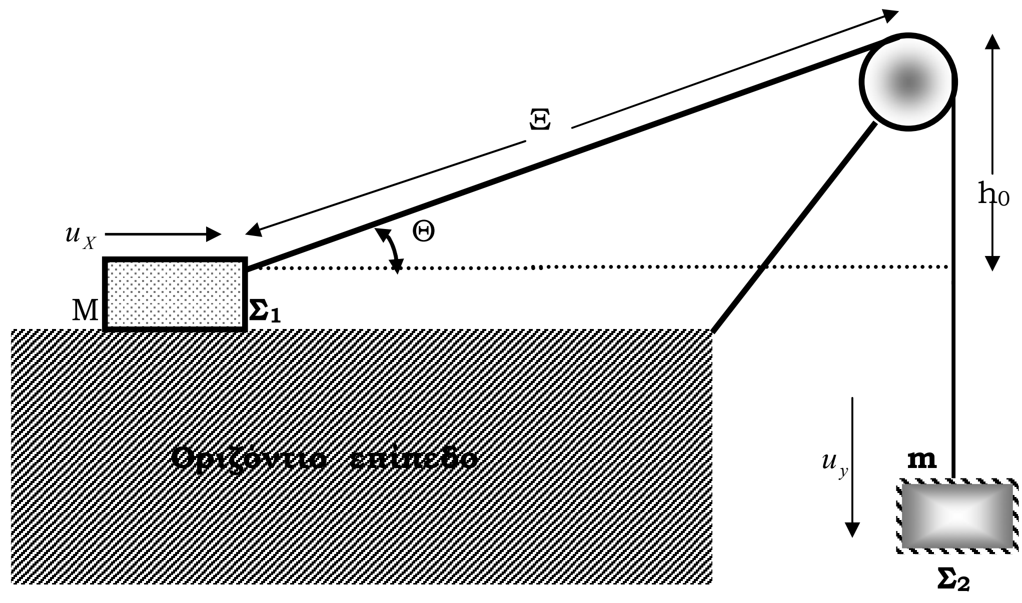
Άρα τα δύο μοντέλα αυτοκινήτου όταν θα συναντηθούν θα απέχουν από το σημείο Α 195,31m.

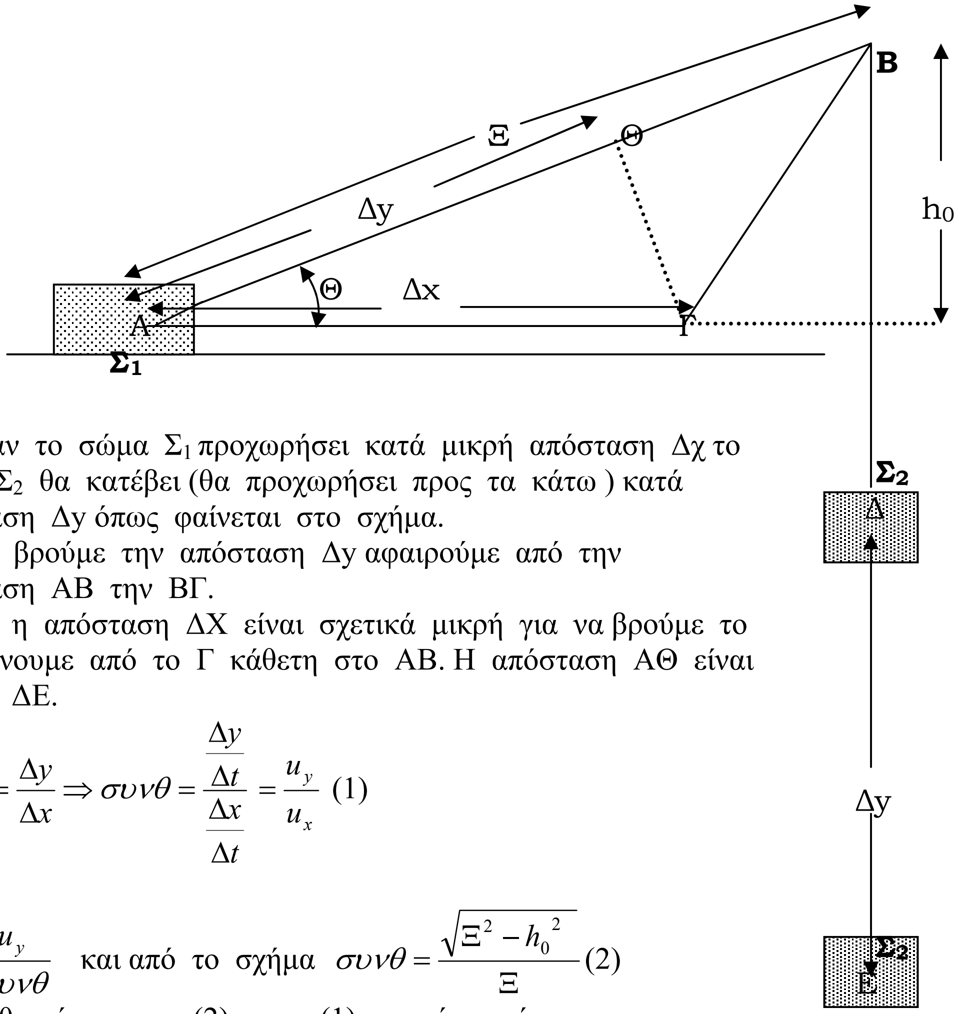
(γ) Για να βρούμε τις ταχύτητες u_1 και u_2 των δύο μοντέλων αυτοκινήτων κατά τη χρονική στιγμή της συνάντησής τους, αντικαθιστούμε στις σχέσεις:

$u_1 = u_{01} + a_1.t = 10 + 12{,}15 \Rightarrow u_1 = 22{,}15\dfrac{m}{s}$ (9)

$u_2 = u_{02} - a_{2.}.t = 20 - 2.12{,}15 \Rightarrow u_2 = -4{,}3\dfrac{m}{s}$ (10)

ΘΕΜΑ 6^0





(α) Όταν το σώμα Σ_1 προχωρήσει κατά μικρή απόσταση Δχ το σώμα Σ_2 θα κατέβει (θα προχωρήσει προς τα κάτω) κατά απόσταση Δy όπως φαίνεται στο σχήμα.
Για να βρούμε την απόσταση Δy αφαιρούμε από την απόσταση ΑΒ την ΒΓ.
Επειδή η απόσταση ΔΧ είναι σχετικά μικρή για να βρούμε το Δy φέρνουμε από το Γ κάθετη στο ΑΒ. Η απόσταση ΑΘ είναι ίση με ΔΕ.

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_y}{u_x} \quad (1)$$

$u_x = \dfrac{u_y}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και από το σχήμα $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\sqrt{\Xi^2 - h_0^{\ 2}}}{\Xi}$ (2)

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) προκύπτει ότι:

$$u_x = \frac{\Xi}{\sqrt{\Xi^2 - h_0^{\ 2}}}.u_y \Rightarrow u_x = r.u_y \quad (3)$$

(β)Ξεκινούμε από το Β΄ νόμο του Νεύτωνα
$\Sigma F = m.a\,(4)$
Εφαρμόζοντας τη σχέση (4) για το Σώμα Σ_1 και το σώμα Σ_2 προκύπτει ότι :
$W_2 - T = m.a_2\,(5)$ και $T.\sigma\upsilon\nu\theta = \mathrm{M}.\alpha_1\,(6)$

$$\eta\mu 30^0 = \frac{h_0}{\Xi} \Rightarrow \Xi = \frac{h_0}{\eta\mu 30^0} = 1{,}6m\,(7)$$

Από τα δεδομένα $r = \dfrac{\Xi}{\sqrt{\Xi^2 - h_0^{\ 2}}}$ οπότε

$$r = \frac{1.6}{\sqrt{1.6^2 - 0{,}8^2}} = 1{,}155\,(8)$$

Αφού $u_x = r.u_y$ τότε παίρνοντας μια μικρή μεταβολή της u_x και μια μικρή μεταβολή της u_y διαιρώντας και τα δύο μέλη της ισότητας αυτής με Δt προκύπτει ότι : $\frac{\Delta u_x}{\Delta t} = r.\frac{\Delta u_y}{\Delta t}$(9)

$\Rightarrow a_1 = r.a_2 = 1{,}155.a_2$ (10)

Από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει το σύστημα των πιο κάτω εξισώσεων μετά από τις αντικαταστάσεις:

$10 - T = 1.a_2$ (11) και $T.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.a_1$ (12) ενώ παράλληλα ισχύει και η σχέση

$a_1 = 1{,}155.a_2$ (10)

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (11) και (12) προκύπτει:

$\frac{10-T}{T.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_2}{2a_1} \Rightarrow \frac{10-T}{T.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2.1{,}155}$(13) ο λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ προκύπτει από την (10)

Από την (13) προκύπτει ότι:

$(10-T).2{,}31 = T.0{,}866$ και $23{,}1 - 2{,}31.T = T.0{,}866$

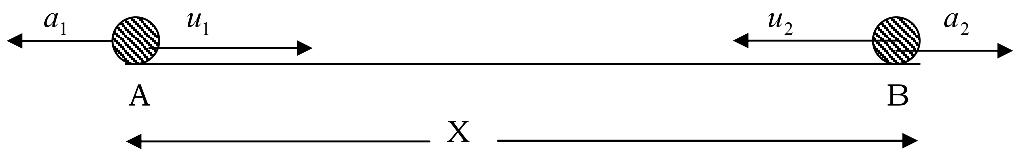
Άρα

$T = \frac{23{,}1}{2{,}31 + 0{,}866} = 7{,}27N$ (14)

Έτσι η Τάση Τ που αναπτύσσεται στο νήμα είναι 7,27Ν.

ΘΕΜΑ 7ο

Τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων περνώντας από το Α και το Β με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα κάνουν ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.



Κατά τη διάρκεια της κίνησής τους και σε χρόνο Δt συναντώνται δύο φορές. Επομένως για να υπολογίσουμε την μεταξύ τους αρχική απόσταση θα πρέπει να λύσουμε την πιο κάτω εξίσωση.

$X = X_1 + X_2$ δηλαδή $X = u_1.t - \frac{1}{2}.a_1.t^2 + u_2 t - \frac{1}{2}.a_2.t^2$ (1)

$$X = u_1.t - \frac{1}{2}.a_1.t^2 + u_2.t - \frac{1}{2}.a_2.t^2 \Rightarrow X = (u_1 + u_2).t - \frac{1}{2}.(a_1 + a_2).t^2 \ (2)$$

Η εξίσωση 2 είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το χρόνο t.

$$X = (u_1 + u_2).t - \frac{1}{2}.(a_1 + a_2).t^2 \Rightarrow 2x = 2.(u_1 + u_2).t - (a_1 + a_2).t^2 \ (3)$$

Από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι: $(a_1 + a_2).t^2 - 2(u_1 + u_2)t + 2x = 0$ (4)

Λύνουμε την εξίσωση (4) ως προς τον χρόνο t:

$$t = \frac{2.(u_1 + u_2) \pm \sqrt{4.(u_1 + u_2)^2 - 8x.(a_1 + a_2)}}{2(a_1 + a_2)} \ (4)$$

Μετά τις απλοποιήσεις η σχέση (4) γίνεται:

$$t = \frac{(u_1 + u_2) \pm \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2x.(a_1 + a_2)}}{(a_1 + a_2)} \ (5)$$

Από την (5) προκύπτουν οι δύο λύσεις της εξίσωσης.

$$t_1 = \frac{(u_1 + u_2) + \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2x.(a_1 + a_2)}}{(a_1 + a_2)}, \ t_2 = \frac{(u_1 + u_2) - \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2x.(a_1 + a_2)}}{(a_1 + a_2)} \ (6)$$

Άρα το ζητούμενο Δt θα είναι: $\Delta t = t_1 - t_2$

$$\Delta t = \left(\cancel{\frac{u_1 + u_2}{a_1 + a_2}}\right) + \frac{\sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2x(a_1 + a_2)}}{a_1 + a_2} - \left(\cancel{\frac{u_1 + u_2}{a_1 + a_2}}\right) + \frac{\sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2x(a_1 + a_2)}}{a_1 + a_2} \ (7)$$

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{u_1 + u_2)^2 - 2x.(a_1 + a_2)}}{a_1 + a_2} \ (8)$$

$$\frac{\Delta t^2 (a_1 + a_2)^2}{4} = (u_1 + u_2)^2 - 2x(a_1 + a_2) \ (9)$$

$$x = ((u_1 + u_2)^2 - \frac{\Delta t^2.(a_1 + a_2)^2}{4}).\frac{1}{2(a_1 + a_2)} \ (10)$$

Έτσι, η απόσταση ΑΒ βρίσκεται από τη σχέση (10).

ΘΕΜΑ 8ο

(α)Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σύστημα βάρκας-βαρκάρη υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_{ΟΛΙΚΟ} = m_{ΟΛΙΚΟ}.\alpha_1 = m_{ΟΛΙΚΟ}.\frac{\Delta u}{\Delta t} \Rightarrow F_{ΟΛΙΚΟ} = m_{ΟΛΙΚΟ}.\frac{u_1}{t_1} = \frac{600.1,5}{4} \Rightarrow F_{ΟΛΙΚΟ} = 225\text{N} \ (1)$$

(β) Το μέτρο της δύναμης F_1 που ασκεί η προβλήτα μέσω του σχοινιού στο βαρκάρη είναι όσο και το μέτρο της δύναμης F_2 που ασκεί ο βαρκάρης στην προβλήτα μέσω του σχοινιού, είναι δηλαδή 300N. Αυτό προκύπτει από τον Γ' νόμο του Νεύτωνα (αξίωμα δράσης -αντίδρασης) αφού οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης-αντίδρασης.

(γ) Η αντίσταση που προβάλλει το νερό πάνω στη βάρκα υπολογίζεται με βάση τη σχέση:

$F_{ΟΛΙΚΟ} = F_2 - R \Rightarrow R = F_2 - F_{ΟΛΙΚΟ} = 300 - 225 = 75\text{N}$ (2)

(δ) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$ η βάρκα και ο βαρκάρης κινούνται προς το μέρος της προβλήτας κάνοντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα (με αρχική ταχύτητα μηδέν). Άρα στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0s$ μέχρι $t_1 = 4s$ θα καλύψει απόσταση x_1 η οποία βρίσκεται από τη σχέση:

$x_1 = \frac{1}{2}.a_1.t_1^2 = \frac{1}{2}.(\frac{1,5}{4}).16 \Rightarrow x_1 = 3m$ (3)

Άρα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$ το σύστημα βάρκας - βαρκάρη θα καλύψει απόσταση 3m, δηλαδή θα προσεγγίσει την προβλήτα κατά 3m.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$ η Δύναμη που ασκεί ο Βαρκάρης στην προβλήτα μηδενίζεται οπότε η βάρκα με τον βαρκάρη κινείται κάνοντας πια ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι η αντίσταση του νερού R που είναι σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης.

Έτσι εφαρμόζοντας τον Β΄ νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι:

$F_{ΟΛΙΚΟ} = m_{ΟΛΙΚΟ}.\alpha_2 \Rightarrow R = m_{ΟΛΙΚΟ}.\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{R}{m_{ΟΛΙΚΟ}} = \frac{75}{600} \Rightarrow \alpha_2 = 0,125\frac{m}{s^2}$ (4)

Βρίσκουμε τον χρόνο που θα κάνει η βάρκα και ο βαρκάρης κινούμενοι μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά τους.

$u_2 = u_1 - a_2.t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{u_1}{a_2} = \frac{1,5}{0,125} \Rightarrow t_2 = 12s$ (5)

Έτσι το σύστημα βάρκας-βαρκάρη θα κινείται άλλα 12s μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του (υπό την προϋπόθεση ότι δεν θα συναντήσει και συγκρουστεί με την προβλήτα πιο πριν).

Στο πιο πάνω χρονικό διάστημα θα καλύψει απόσταση :

$x_2 = u_1.t_2 - \frac{1}{2}.a_2.t_2^2 = 1,5.12 - \frac{1}{2}.0,125.144 \Rightarrow x_2 = 9m$ (6)

Άρα η βάρκα μαζί με τον βαρκάρη, κινούμενοι για χρονικό διάστημα 16s, θα καλύψουν συνολική απόσταση:

$X_{ΟΛΙΚΟ} = x_1 + x_2 = 3 + 9 = 12m$ (7)

Άρα η απόσταση που θα καλύψει συνολικά η βάρκα με το βαρκάρη θα είναι 12m. Επειδή η προβλήτα απέχει 14m από την αρχική θέση της βάρκας, δηλαδή απόσταση μεγαλύτερη, η βάρκα με το βαρκάρη δεν θα καταφέρουν να φτάσουν στην προβλήτα.

ΤΕΛΟΣ