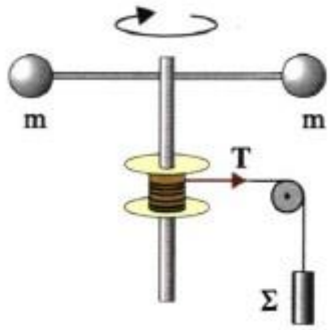
4-6 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Στην περίπτωση ενός υλικού σημείου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής Σ**F** = m**α** προκύπτει ότι για να μεταβληθεί η ταχύτητά του πρέπει να ασκηθεί σε αυτό δύναμη. Αντίστοιχος νόμος ισχύει στη στροφική κίνηση στερεών σωμάτων. Σύμφωνα με αυτόν, για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή. Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι

$$\boxed{\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο **θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης**, δηλαδή,

1. **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένης ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος.**



Σχ. 4.22 Το σώμα Σ, μέσω του σκοινιού, ασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα των μαζών m να αυξάνεται..

Από τη σχέση (4.7) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα αλλάζει η περιστροφική κατάσταση του σώματος. Η **ροπή αδράνειας** εκφράζει στην περιστροφή, ό,τι εκφράζει η μάζα στη μεταφορική κίνηση, **δηλαδή την αδράνεια του σώματος στη στροφική κίνηση.** Ενώ όμως η μάζα ενός σώματος είναι σταθερό μέγεθος η ροπή αδράνειας εξαρτάται κάθε φορά από τη θέση του άξονα περιστροφής.

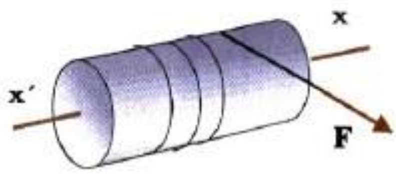
Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση (4.7)προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε στροφικές κινήσεις γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Τα συμπεράσματά μας για την κίνηση αυτή μπορούν να επεκταθούν και στις περιπτώσεις που ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται. Αυτό συμβαίνει στις σύνθετες κινήσεις, στις οποίες το σώμα κάνει ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση, όπως στην κίνηση ενός τροχού που κυλάει. Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις αυτές, αρκεί ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα να διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, να είναι άξονας συμμετρίας και να μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-8

Ομογενής κύλινδρος μάζας M= 40 kg και ακτίνας R=40 cm, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονα του που είναι σταθερός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε τυλίξει σκοινί, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή δύναμη F= 6 N. Το σκοινί ξετυλίγεται, χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου;

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$



Απάντηση :

Η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον κύλινδρο προκαλεί ροπή $\tau = FR$

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\tau = I\alpha_{γων}$ ή $FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων}$

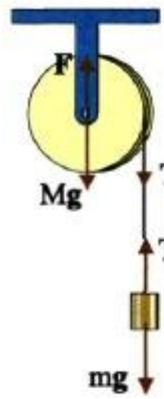
Σχ. 4.23

Λύνοντας ως προς α και αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών βρίσκουμε

$$\alpha_{γων} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 6N}{40kg \cdot 40 \cdot 10^{-2}m} = 0{,}75\ rad/s^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-9

Μία τροχαλία ακτίνας R, και ροπής αδράνειας I μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα μάζας m. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και την τάση του νήματος.



Απάντηση :

Θα εφαρμόσουμε τους νόμους της μηχανικής χωριστά σε κάθε σώμα. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m, είναι το βάρος του **mg** και η τάση του νήματος **T.**

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $mg - T = ma$ (4.8)

Σχ. 4.24

Στον τροχό ασκούνται η **T** (από το νήμα), η δύναμη **F** (από τον ο άξονα) και το βάρος του **Mg**. Οι δυνάμεις **Mg** και **F** δε δημιουργούν ροπή γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση δίνει

$\tau = I\alpha_{γων}$ ή $TR = I\alpha_{γων}$ (4.9)

Λύνοντας την (4.8) ως προς T έχουμε $T = mg - ma$

Αντικαθιστώντας στην (4.9) $mgR - mRa = I\alpha_{γων}$ (4.10)

Η επιτάχυνση α του σώματος είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Για την επιτάχυνση αυτή ισχύει α = $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$ $= \alpha_{\gamma\omega\nu} R$ (4.11)

οπότε η (4.10) γίνεται $mgR - mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

Επομένως $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{mgR}{I + mR^2}$ (4.12)

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε για τη γραμμική επιτάχυνση

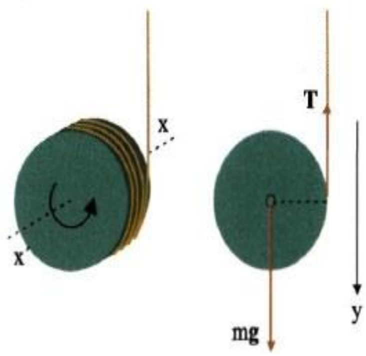
$\alpha = \frac{mgR^2}{I + mR^2}$ (4.13)

Η τάση T υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε την (4.12) στην (4.9)

$$T = \frac{I}{R}\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{I}{R}\frac{mgR}{I + mR^2} \quad \text{ή} \quad T = \frac{I\,mg}{I + mR^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-10

Το γιο - γιο αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα σκοινί. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο να πέσει, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα, τον xx'. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Θεωρήστε ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το σκοινί παραμένει κατακόρυφο.



Απάντηση :

Σχ. 4.25

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του mg και η δύναμη T από το σκοινί. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$\Sigma F_y = m\alpha_{cm}$ ή $mg - T = m\alpha_{cm}$ οπότε $T = mg - m\alpha_{cm}$ (4.14)

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα xx' έχουμε

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4.15)

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) βρίσκουμε

$mgR - mR\alpha_{cm} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

ή $\quad mgR - mR\alpha_{cm} = \frac{1}{2} mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $g - \alpha_{cm} = \frac{1}{2} R\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4.16)

Όμως $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$ οπότε $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R}$

Αντικαθιστώντας στην (4.16) βρίσκουμε $g - \alpha_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}$ ή $\alpha_{cm} = \frac{2g}{3}$