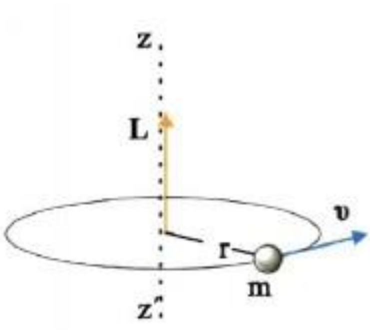
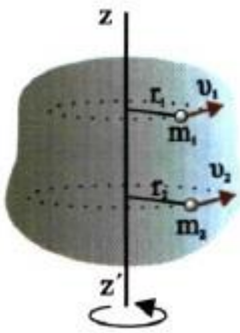
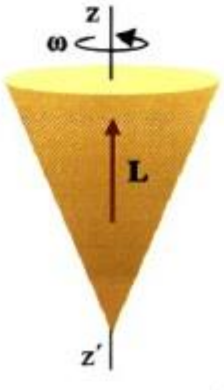



**Σχ. 4.26** Το υλικό σημείο μάζας m κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του.




**Σχ. 4.27** Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες $m_1$ $m_2$ ... Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.




## 4-7 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Η ορμή αποδείχτηκε μέγεθος ιδιαίτερα χρήσιμο για την περιγραφή της μεταφορικής κίνησης των στερεών. Το αντίστοιχο της ορμής του στερεού στη στροφική κίνηση το ονομάζουμε **στροφορμή.**

Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τη στροφορμή στερεού σώματος και, τέλος, τη στροφορμή συστήματος σωμάτων.

### Α) Στροφορμή υλικού σημείου

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m και ορμής **p** που κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r (σχ. 4.26).

1. **Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς ένα άξονα z΄z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο**

$\boxed{L = pr}$ ή $\boxed{L = mυr}$

1. **διεύθυνση αυτή του άξονας z'z και φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα στροφορμής είναι το 1kg $m^2$/s.**

### Β) Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω το στερεό του σχήματος 4.27 που περιστρέφεται γύρω από το σταθερό άξονα z΄z με γωνιακή ταχύτητα ω. Κατά την περιστροφή του σώματος τα διάφορα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές τα επίπεδα των οποίων είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Όλα τα σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητά τους όμως είναι διαφορετική, και μάλιστα ανάλογη με την απόσταση τους από τον άξονα περιστροφής. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδη τμήματα, με μάζες $m_1$, $m_2$ .... , τόσο μικρά ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο. Οι στροφορμές των στοιχειωδών αυτών μαζών έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση και μέτρα, $L_1 = m_1υ_1r_1$, $L_2 = m_2υ_2r_2$

.... **Η στροφορμή του σώματος είναι το άθροισμα των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.**

$$L = m_1υ_1r_1 + m_2υ_2r_2 + \ldots\ldots\ldots$$

Επειδή τα υλικά σημεία $m_1$, $m_2$ ... κάνουν κυκλική κίνηση οι ταχύτητές τους $υ_1$,$υ_2$ ... μπορούν να γραφούν $υ_1 = ωr_1$, $υ_2 = ωr_2$ κ. ο. κ. οπότε

$L = m_1ωr_1^2 + m_2ωr_2^2 + \ldots\ldots = ω\,(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots)$ όμως $m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots = I$

επομένως

**Σχ. 4.28** Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z'z με γωνιακή ταχύτητα ω. Η στροφορμή του σώματος είναι Iω, βρίσκεται πάνω στον άξονα και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

1. **Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα ισούται με**

$$\boxed{L = I\omega} \qquad (4.17)$$

1. 

**έχει τη διεύθυνση του άξονα και η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.**

**Στροφορμή μερικών σωμάτων**

| | |
|---|---|
| Τροχιακή κίνηση της Γής | $2,7 \times 10^{40}$ kg $m^2/s$ |
| Περιστροφή της Γης | $5,8 \times 10^{33}$ kg $m^2/s$ |
| Τροχός αυτοκινήτου (u=90km/h) | $10^2$ kg $m^2/s$ |
| Δίσκος πικ-απ (33 στροφές ανά min) | $6 \times 10^{-3}$ kg $m^2/s$ |
| Τροχιακή κίνηση ηλεκτρονίου | $1,05 \times 10^{-35}$ kg $m^2/s$ |
| Σπιν ηλεκτρονίου | $0,53 \times 10^{-34}$ kg $m^2/s$ |

Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονά που περνάει από το κέντρο μάζας του συχνά την ονομάζουμε **σπιν**, για να τη διακρίνουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της και στροφορμή εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο, δηλαδή της τροχιακής της κίνησης.

Τα στοιχειώδη σωματίδια - ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια - έχουν σπιν μέτρου $0,53 \times 10^{-34}$J Αυτή η στροφορμή σπιν συνήθως εκφράζεται ως $\frac{1}{2}$h, όπου h = 0,53 x $10^{-34}$J (προφέρεται έιτς μπάρ) και είναι μια θεμελιώδης ποσότητα στροφορμής που εμφανίζεται συχνά στη κβαντική φυσική.

**Γ) Στροφορμή συστήματος**

Σε ένα σύστημα σωμάτων, **στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.** Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, .., η στροφορμή **L** του συστήματος είναι

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} + ....$$

**ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ**

Από τη σχέση 4.17 προκύπτει ότι αν σε απειροστά μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα του στερεού μεταβληθεί κατά dω, η στροφορμή του θα μεταβληθεί κατά

$$dL = I\, d\omega$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει $\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}$ = Ια

και εξαιτίας της (4.7) $$\boxed{\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}} \qquad (4.18)$$

1. Επομένως **το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του**

Η σχέση αυτή είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Newton.**

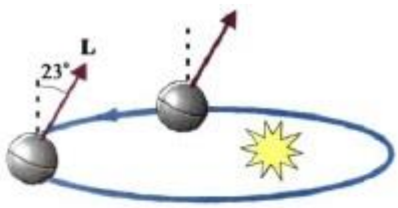
Ο νόμος αυτός ισχύει και σε σύστημα σωμάτων. Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.
Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση - αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν. Έτσι η σχέση 4.18 για σύστημα σωμάτων γράφεται

$$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt} \qquad (4.19)$$

όπου $\tau_{\varepsilon\xi}$ η ροπή μιας εξωτερικής δύναμης και L η στροφορμή του συστήματος.

## 4-8 ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Στη στροφική κίνηση ισχύει ένας νόμος διατήρησης, ανάλογος με το νόμο διατήρησης της ορμής που ισχύει στη μεταφορική κίνηση. Το μέγεθος που διατηρείται στη στροφική κίνηση είναι η στροφορμή.




**Σχ. 4.29** Η στροφορμή της Γης - λόγω της ιδιοπεριστροφής της- διατηρείται σταθερή

**Η διατήρηση της στροφορμής σε ένα σώμα**

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση Στ= $\frac{dL}{dt}$ προκύπτει ότι $\frac{dL}{dt}$ = 0 επομένως, L = σταθ. Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (ιδιοπεριστροφή), επειδή η ελκτική δύναμη που δέχεται από τον Ήλιο δε δημιουργεί ροπή, αφού ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Επομένως η χρονική διάρκεια περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή -24 ώρες.

**Η διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα σωμάτων.**

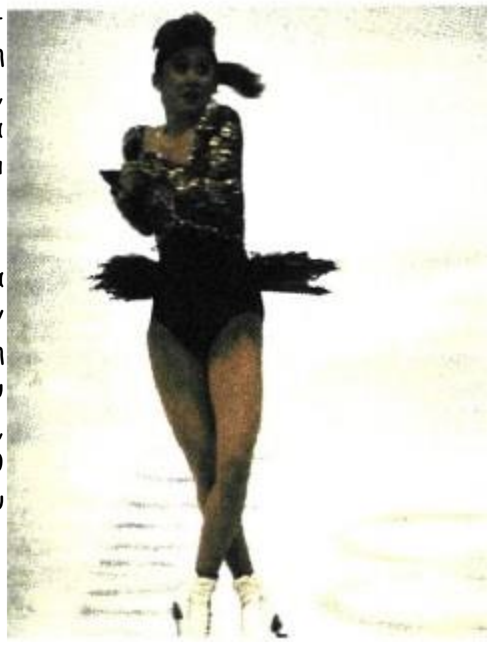
Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει τη μορφή $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής.**

1. **Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.**

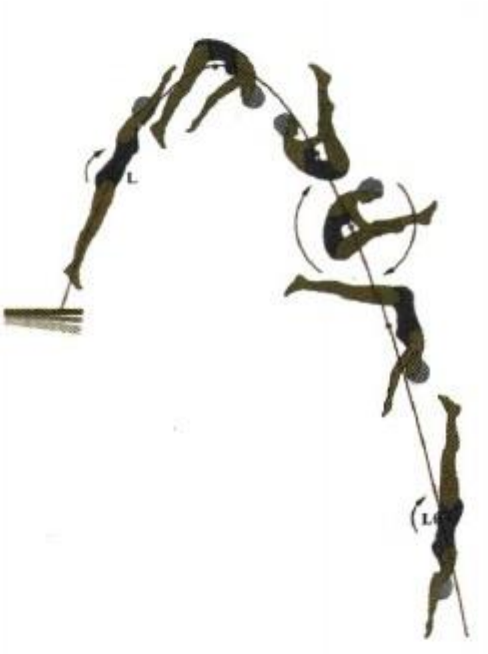
Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Τα παραδείγματα φαινομένων στα οποία διατηρείται η στροφορμή είναι πολλά. Στην εικόνα 4.4 φαίνεται μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ, που στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο. Η αθλήτρια μπορεί, συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της, να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Εάν η τριβή των παγοπέδιλων με τον πάγο θεωρηθεί αμελητέα, οι εξωτερικές δυνάμεις - όπως το βάρος και η δύναμη που δέχεται από το έδαφος - δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της, επομένως η στροφορμή της διατηρείται, δηλαδή το γινόμενο Ιω παραμένει σταθερό. Συμπτύσσοντας τα χέρια και τα πόδια της η ροπή αδράνειας μειώνεται, οπότε, αφού το γινόμενο Ιω μένει σταθερό, αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.



Όταν οι ακροβάτες θέλουν να κάνουν πολλές στροφές στον αέρα συμπτύσσουν τα χέρια και τα πόδια τους. Κατά την κίνηση του ακροβάτη στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος του, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή και η στροφορμή του διατηρείται. Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας, επομένως αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Στο σχήμα 4.30 φαίνεται πως, με την τεχνική αυτή, μια κατάδυση μπορεί να γίνει πολύ θεαματική.



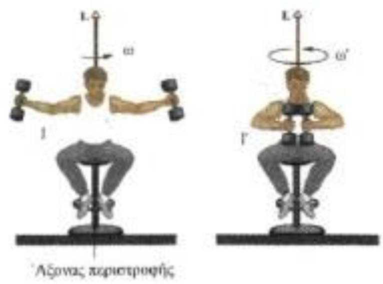
**Εικ. 4.4** Η χορεύτρια συμπτύσσοντας τα άκρα της αυξάνει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

**Σχ. 4.30** Με τη σύμπτυξη των άκρων μειώνεται η ροπή αδράνειας της καταδύτριας με συνέπεια την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της.

Τα αστέρια τα οποία στο τελευταίο στάδιο της ζωής τους έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου, μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Τα αστέρια αυτά, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν, συρρικνώνονται λόγω της βαρύτητας μέχρις ότου η πυρήνες των ατόμων τους αρχίσουν να εφάπτονται, με αποτέλεσμα η ακτίνα ενός τέτοιου αστεριού να είναι μόνο 15-20 km. Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται σταθερή και επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται δραματικά έχουμε μια αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας περιστροφής. Υπολογίζεται ότι ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με συχνότητα 3000 στροφές το δευτερόλεπτο. Για σύγκριση, να αναφέρουμε ότι η περίοδος περιστροφής του Ήλιου είναι 25 μέρες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-11

Ο άνθρωπος στο σχήμα 4.31, έχει τα χέρια του τεντωμένα και στο κάθε χέρι του κρατάει ένα βαράκι μάζας Μ= 4 kg. Εξαιτίας μιας ώθησης που δέχτηκε, ο άνθρωπος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1$ = 4 rad/s. Με ποια γωνιακή ταχύτητα θα στρέφεται αν συμπτύξει τα χέρια του; Το κάθισμα πάνω στο οποίο κάθεται, ο άνθρωπος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα, που είναι ο άξονας συμμετρίας. Η ροπή αδράνειας του ανθρώπου (χωρίς τα βαράκια που κρατάει) όταν έχει τα χέρια του τεντωμένα είναι 3,25 $kgm^2$ και όταν συμπτύσσει τα χέρια του είναι 2,5 $kgm^2$.




**Σχ. 4.31**

Κάθε βαράκι απέχει από τον άξονα περιστροφής 1 m, στην αρχή και 0,2 m στο τέλος. Η ροπή αδράνειας του καθίσματος είναι αμελητέα.

**Απάντηση :**

Η αρχική ροπή αδράνειας $I_1$ , του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής, όταν ο άνθρωπος είχε τα χέρια του τεντωμένα, ήταν το άθροισμα της ροπής αδράνειας του ανθρώπου και της ροπής αδράνειας των σωμάτων που κρατάει.

$$I_1 = I_1^{ανθρ} + I_1^{βαρ} = I_1^{ανθρ} + 2MR_1^2 = 11,25 \text{ kg m}^2$$

Η ροπή αδράνειας $I_2$ του συστήματος, όταν ο άνθρωπος κατεβάσει τα χέρια του είναι η νέα ροπή αδράνειας του ανθρώπου και η ροπή αδράνειας των σωμάτων.

$$I_2 = I_2^{ανθρ} + I_2^{βαρ} = I_2^{ανθρ} + 2MR_2^2 = 2,82 \text{ kg m}^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ενεργούν εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του διατηρείται. Δηλαδή ισχύει:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = 16 \text{ rad/s}$$