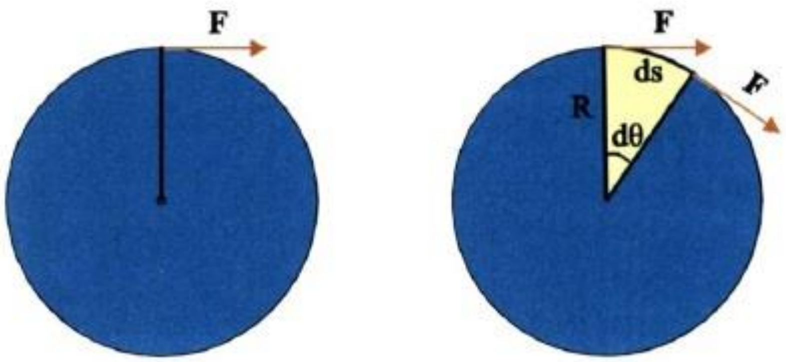
4-10 ΕΡΓΟ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν πατάμε τα πετάλια του ποδηλάτου ασκούμε δύναμη και παράγουμε έργο. Έργο παράγεται και από τη μηχανή του αυτοκινήτου καθώς στρέφει τον άξονα των τροχών. Το έργο μιας δύναμης που στρέφει ένα σώμα μπορούμε να το εκφράσουμε σε συνάρτηση με τη ροπή της.

Έστω ότι η δύναμη F ασκείται στην περιφέρεια ενός τροχού ακτίνας R, κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης (σχ. 4.35). Κατά την απειροστά μικρή στροφή του τροχού κατά γωνία dθ η δύναμη παράγει έργο



Σχ. 4.34 Με την επίδραση της δύναμης F το σώμα στρέφεται κατά γωνία dθ. Το σημείο εφαρμογής της F μετατοπίζεται κατά ds=R dθ.

$$dW = Fds$$

Αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια τότε $ds = Rd\theta$ και

$$dW = FRd\theta$$

Το γινόμενο FR είναι η ροπή τ της δύναμης.

Επομένως $$dW = \tau d\theta \qquad (4.21)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης καθώς ένα σώμα στρέφεται κατά γωνία θ χωρίζουμε τη γωνία σε απειροστά μικρές γωνίες $d\theta_1$,$d\theta_2$... και αθροίζουμε τα αντίστοιχα έργα. Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος 4.35, από το άθροισμα προκύπτει

Από την (4.21) παίρνουμε

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου dW / dt είναι **η ισχύς P της δύναμης** και το dθ / dt είναι η γωνιακή ταχύτητα ω του σώματος, επομένως

$$P = \tau\omega$$

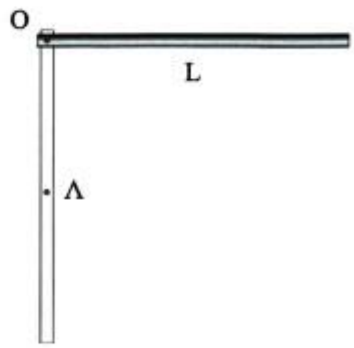
Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\sum W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2}$$

1. δηλαδή **το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-12

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους L=0,3 m και μάζας M, στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα O που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά η ράβδος είναι οριζόντια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητά της τη στιγμή που θα περάσει από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O είναι $\frac{1}{3}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.



Σχ. 4.35

Απάντηση :

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσον της ράβδου Λ όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Το μέσον της ράβδου είναι το κέντρο μάζας της .

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση έχει δυναμική ενέργεια $Mg\frac{L}{2}$.

Όταν η ράβδος περάσει από την κατακόρυφη θέση, θα έχει κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}I\omega^2$ όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα O.

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ισχύει

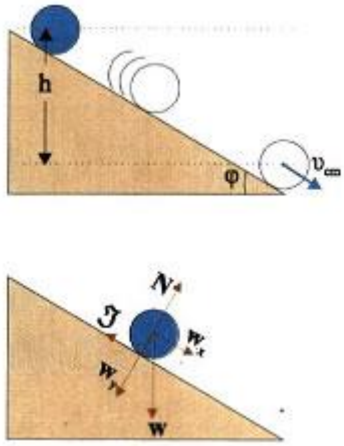
$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ ή } Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega^2$$

απ' όπου $$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 10 \text{ rad/s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-13

Ομογενής κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει κατά μήκος πλάγιου επιπέδου γωνίας φ. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν η κατακόρυφη μετατόπισή του είναι h.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) θεωρείται γνωστή. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$



Σχ. 4.36

Απάντηση :

Η κύλιση του κυλίνδρου οφείλεται στην τριβή. Η ροπή της τριβής ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου είναι αυτή που περιστρέφει τον κύλινδρο. Η τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Πρόκειται, δηλαδή, για στατική τριβή. Επομένως η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου διατηρείται.

Αν θεωρήσουμε ότι στην κατώτερη θέση του η δυναμική ενέργεια του κυλίνδρου είναι ίση με μηδέν, στην ανώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια Mgh.

Στην κατώτερη θέση του ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια, που ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς ($\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2$) και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής ($\frac{1}{2}I\omega^2$)

Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{ή} \quad Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

ή $$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\omega^2 \qquad (4.22)$$

Όμως η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας είναι

$$\upsilon_{cm} = \omega R \tag{4.23}$$

Η (4.22) γίνεται από την (4.23)

$gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}R^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{R}\right)^2$ από όπου $gh = \frac{1}{2}\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}\upsilon_{cm}^2$ και τελικά $\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΕ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Θέση x	Θέση θ
Ταχύτητα $\upsilon = dx/dt$	Γωνιακή ταχύτητα $\omega = d\theta/dt$
Επιτάχυνση $a = d\upsilon/dt$	Γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = d\omega/dt$
Δύναμη $\mathbf{F}$	Ροπή $\boldsymbol{\tau}$
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Θεμελειώδης Νόμος της Μηχανικής $\Sigma\mathbf{F}=m\mathbf{a}$	Θεμελειώδης Νόμος της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau=Ia_{\gamma\omega\nu}$
Ορμή $\mathbf{p}=m\boldsymbol{\upsilon}$	Στροφορμή $L=I\omega$
Δεύτερος Νόμος του Newton $\Sigma F=d\mathbf{p}/dt$	Δεύτερος νόμος του Newton στην στροφική κίνηση $\Sigma\tau=dL/dt$
Διατήρηση της ορμής $\Sigma\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}=0$ $\mathbf{p}$=σταθερό	Διατήρηση της στροφορμής Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ L=σταθερό
Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς $K=1/2m\upsilon^2$	Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής $K=1/2I\omega^2$