

3.5. Η Διατήρηση Ενέργειας και η Εξίσωση του Bernoulli (Μπερνούλι)

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός ρευστού που ρέει μέσα σε ένα σωλήνα είναι, εν γένει, διαφορετική ανάμεσα σε δύο σημεία που έχουν υψομετρική διαφορά. Το νερό

στις βρύσες του πέμπτου ορόφου έχει μικρότερη πίεση από το νερό στις βρύσες του ισογείου.

Σε ένα σωλήνα που η διατομή του δεν είναι παντού ίδια, η ταχύτητα του υγρού μεταβάλλεται (εξίσωση της συνέχειας). Δηλαδή μια μικρή μάζα m του υγρού σε άλλες περιοχές του σωλήνα επιταχύνεται και σε άλλες επιβραδύνεται. Στις περιπτώσεις αυτές η συνολική δύναμη που δέχεται αυτή η μάζα από το περιβάλλον υγρό δεν είναι μηδενική και κατά συνέπεια η πίεση δε μπορεί να είναι ίδια σε όλες τις περιοχές του σωλήνα.

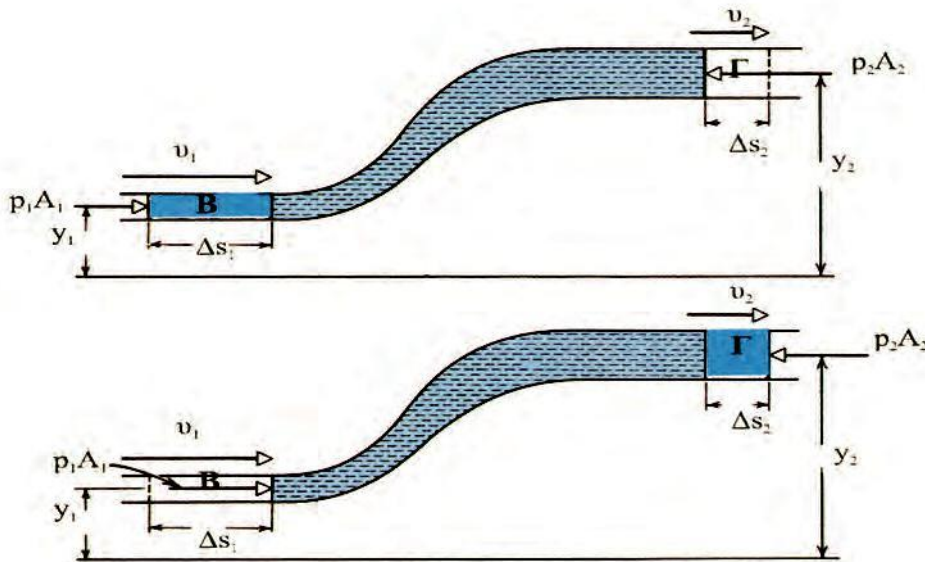
Το 1738 ο Ελβετός Daniel Bernoulli βρήκε μια σχέση που συνδέει την πίεση με την ταχύτητα και με το ύψος.

Έστω ότι έχουμε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής μέσα στον οποίο ρέει ένα ασυμπίεστο ρευστό (σχ. 3.10). Θα εξετάσουμε την πίεση σε δύο σημεία B , Γ , του σωλήνα. Το σημείο B βρίσκεται σε ύψος y_1 από το έδαφος και ο σωλήνας έχει στην περιοχή του B διατομή A_1 . Η πίεση του ρευστού στο B είναι p_1 . Το σημείο Γ βρίσκεται σε ύψος y_2 από το έδαφος, η διατομή του σωλήνα εκεί είναι A_2 και η πίεση p_2 . Αν θεωρήσουμε σαν σύστημα το ρευστό από το B μέχρι το Γ , βλέπουμε ότι δέχεται από το υπόλοιπο ρευστό μια δύναμη $p_1 A_1$ στην περιοχή του B και μια δύναμη, την $p_2 A_2$ στην περιοχή του Γ , με φορά αντίθετη με τη φορά της $p_1 A_1$. Σ' ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα t ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού στην περιοχή του B μετατοπίζεται κατά s_1 ενώ ένα αντίστοιχο τμήμα του ρευστού ίσης μάζας, άρα και όγκου, στην περιοχή του Γ μετατοπίζεται κατά s_2 .



Daniel Bernoulli (1700-1782). Ελβετός φυσικός και μαθηματικός, από οικογένεια διάσημων μαθηματικών. Η πιο φημισμένη του εργασία ήταν πάνω στην υδροδυναμική. Οι μελέτες του Bernoulli πάνω στα ρευστά αποτέλεσαν την απαρχή της κινητικής θεωρίας των αερίων. Ο Bernoulli τιμήθηκε πολύ στη διάρκεια της ζωής του με σειρά από αξιώματα και θέσεις στα πανεπιστήμια της εποχής του.

Εικόνα 3-3.



Ασυμπίεστο ρευστό ρέει με στρωτή ροή μέσα σε ένα σωλήνα. Το ρευστό που βρίσκεται στο μέρος του σωλήνα με μήκος

σωλήνα που έχει μήκος δύο μέρη είναι ίσοι.

Σχήμα 3-10.

s_2 . Οι όγκοι του ρευστού στα

s_1 μετακινείται στο μέρος του

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας στο μικρό χρονικό διάστημα t . Σύμφωνα με αυτό

$$W + W_B = \Delta K \quad (3.10)$$

όπου W το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού από το B στο Γ από το περιβάλλον ρευστό. Το έργο αυτό θα είναι το έργο της δύναμης $p_1 A_1$ (θετικό) συν το έργο της $p_2 A_2$ (αρνητικό)

$$W = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2 \quad (3.11)$$

Όμως

$$A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2 = \Delta V$$

Οπότε

$$W = (p_1 - p_2) \Delta V$$

Το έργο του βάρους στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho \Delta V g (y_2 - y_1) \quad (3.12)$$

καθώς, στην ουσία, ένα τμήμα του ρευστού m έφυγε από το ύψος y_1 και βρέθηκε στο ύψος y_2 .

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad (3.13)$$

όπου v_1 η ταχύτητα του ρευστού στο B και v_2 η ταχύτητα του ρευστού στο Γ .

Αντικαθιστώντας τις (3.11), (3.12) και (3.13) στη σχέση (3.10) έχουμε

$$(p_1 - p_2) \Delta V - \rho \Delta V g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Απλοποιούμε τα ΔV και αναδιατάσσοντας την εξίσωση έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων άρα μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{σταθερό}$$

παραπάνω σχέση είναι η **εξίσωση του Bernoulli** για ιδανικό ρευστό.

Από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει ότι

το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα

όγκου ($\frac{1}{2} \rho v^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου

($\rho g y$) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

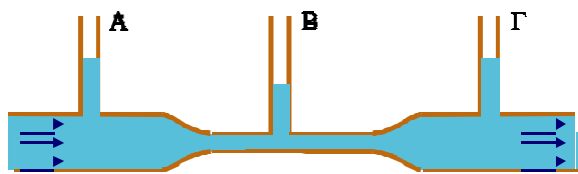
εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στη ροή των ρευστών.

Αν ο σωλήνας είναι οριζόντιος η εξίσωση του Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{σταθερό}$$

από όπου φαίνεται ότι σε περιοχές όπου πυκνώνουν οι ρευματικές γραμμές (μικρή διατομή του σωλήνα) και η ταχύτητα ροής αυξάνεται,

η πίεση ελαττώνεται.



Στο στενό μέρος του σωλήνα η ταχύτητα του υγρού είναι μεγαλύτερη. Το ύψος

της στάθμης του υγρού δείχνει ότι η πίεση στο σωλήνα είναι μικρότερη.

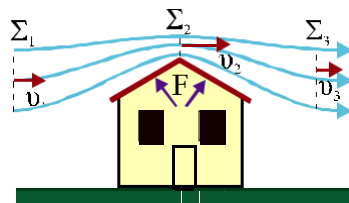
Σχήμα 3-11.

Εφαρμογή 3-1

Γιατί ο δυνατός άνεμος παρασέρνει τις στέγες των σπιτιών;

Ο δυνατός άνεμος όταν συναντά το σπίτι (σχ. 3.12) περνά πάνω από αυτό, με αποτέλεσμα η φλέβα του αέρα να στενεύει στη θέση Σ_2 πάνω από τη στέγη, άρα η ταχύτητά του v_2 να είναι μεγαλύτερη από τις ταχύτητες v_1 και v_3 που έχει στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 , αντίστοιχα, πριν και μετά απ' αυτήν (εξίσωση συνέχειας).

Επειδή στη θέση Σ_2 η ταχύτητα του ανέμου είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 , σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli η πίεση στο Σ_2 θα είναι μικρότερη από αυτήν στις θέσεις Σ_1 και Σ_3 . Η πίεση πάνω από τη στέγη θα είναι ακόμη μικρότερη από αυτήν που επικρατεί στο εσωτερικό του σπιτιού όπου ο αέρας είναι ακίνητος. Η ισορροπία δυνάμεων που διατηρεί τη στέγη στη θέση της διαταράσσεται, με αποτέλεσμα η στέγη να τείνει να ανυψωθεί.



Σχήμα 3-12.

Εφαρμογή 3-2

Θεώρημα Torricelli (Υπολογισμός ταχύτητας εκροής υγρού από ανοικτό δοχείο)

Έστω ότι έχουμε το δοχείο του σχήματος 3.13 στη βάση του οποίου υπάρχει στόμιο εκροής.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τις θέσεις Ε (ελεύθερη επι-φάνεια) και Κ (στόμιο εκροής):

$$p_E + \frac{1}{2} \rho v_E^2 + \rho gh = p_K + \frac{1}{2} \rho v_K^2 + 0 \quad (3.14)$$

Η πίεση τόσο στην ελεύθερη επιφάνεια όσο και στο σημείο εξόδου είναι η ατμοσφαιρική, δηλαδή :

$$p_E = p_K = p_{at} \quad (3.15)$$

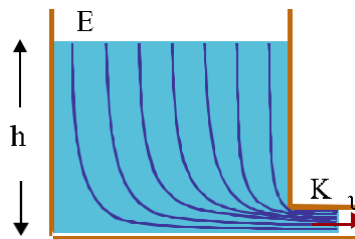
ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα συγκριτικά με την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στο Κ

$$v_E = 0 \quad (3.16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.15) και (3.16) και επιλύοντας την (3.14)

ως προς v_K βρίσκουμε

$$v_K = \sqrt{2gh}$$



Σχήμα 3-13.

που αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του **θεωρήματος του Torricelli** (Τορικέλι).

ταχύτητα εκροής υγρού από στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνειά του είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h .

Εφαρμογή 3.3

Ποια δύναμη ανυψώνει τα αεροπλάνα;

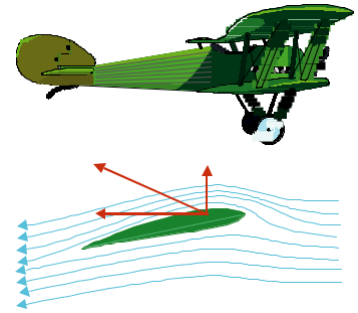
Οι πτέρυγες των αεροπλάνων είναι έτσι σχεδιασμένες ώστε, όταν κινούνται, οι ρευματικές γραμμές του αέρα να παρουσιάζουν πύκνωση στο επάνω μέρος τους και αραιώση στο κάτω (σχ. 3.14).

Η πίεση στο άνω μέρος των πτερύγων είναι μικρότερη από αυτήν στο κάτω μέρος. Η δύναμη που δέχονται οι πτέρυγες λόγω αυτής της διαφοράς πίεσης λέγεται **αεροδύναμη** ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της λέγεται **δυναμική άνωση**.

Οι πιέσεις που αναπτύσσονται είναι συνάρτηση της ταχύτητας του ρευστού, στην περίπτωση μας του αέρα, ή, αν το δούμε αντίστροφα, της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον αέρα.

Αν η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι τέτοια ώστε η δυναμική άνωση που προκύπτει να είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, το αεροπλάνο ανυψώνεται.

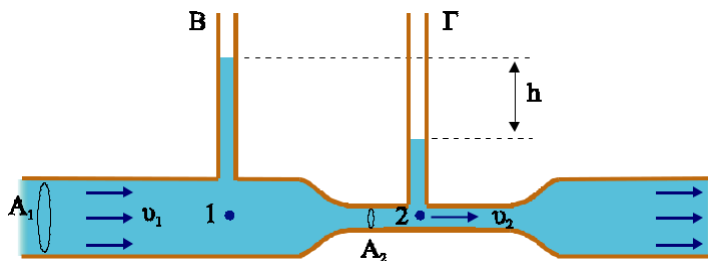
Στην πραγματικότητα το φαινόμενο είναι πολύπλοκο. Η ροή του αέρα πάνω και κάτω από τις πτέρυγες είναι τυρβώδης και για να υπολογισθεί ακριβέστερα η δυναμική άνωση απαιτούνται πολύπλοκοι υπολογισμοί.



Σχήμα 3-14

Παράδειγμα 3.3

Το ροόμετρο του Ventouri. Το σχήμα 3.15 δείχνει μία διάταξη που χρησιμεύει για τη μέτρηση της ταχύτητας ροής σε ένα σωλήνα. Αν είναι γνωστές οι διατομές A_1 και A_2 , του σωλήνα και η υψομετρική διαφορά h στη στάθμη των δύο κατακόρυφων ανοιχτών σωληνίων B και Γ , να βρεθεί η ταχύτητα ροής στην περιοχή του σωλήνα που έχει διατομή A_1 .



Σχήμα 3-15.

Απάντηση :

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli στα σημεία 1 και 2 που βρίσκονται στο ίδιο ύψος έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (3.17)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{ή} \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας την (3.18) στην (3.17) έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2 \quad \text{ή} \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \quad (3.19)$$

Όμως $p_1 = p_{at} + \rho g h_1$ και $p_2 = p_{at} + \rho g h_2$ (3.20)
όπου h_1 το ύψος της στήλης του νερού πάνω από το σωλήνα μετρημένο από το σημείο 1 και h_2 το ύψος της στήλης του νερού μετρημένο από το σημείο 2.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.20) παίρνουμε

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h \quad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.19) την (3.21)

βρίσκουμε $\rho g h = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$ και τελικά $v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$

