ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

5

5-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σωμάτων, καθώς και τα μεγέθη που ορίζονται με βάση αυτά, όπως η κινητική ενέργεια και η ορμή, ανήκουν στην κατηγορία των μεγεθών που δεν

έχουν μια μόνο τιμή. Η τιμή τους εξαρτάται από το πού βρίσκεται εκείνος που τα μετράει. Έτσι, ο επιβάτης του τρένου νομίζει ότι ο συνεπιβάτης του είναι ακίνητος, όμως ένας παρατηρητής στην αποβάθρα του σταθμού τον βλέπει να κινείται με την ταχύτητα του τρένου. Όταν αναφερόμαστε στα μεγέθη αυτά, χωρίς άλλη διευκρίνηση, θα εννοούμε τις τιμές που βρίσκει ένας παρατηρητής ακίνητος πάνω στη Γη.
Οι παρατηρητές, που περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο την κίνηση των σωμάτων, πρέπει να συνεννοούνται μεταξύ τους. Σ' αυτή την ανάγκη ανταποκρίθηκε ο Γαλιλαίος με τους μετασχηματισμούς του, που επιτρέπουν να μετατρέψουμε τα δεδομένα της κίνησης σε ένα σύστημα αναφοράς σε δεδομένα για ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το πρώτο (αδρανειακό σύστημα).
Στη μελέτη των προβλημάτων μας μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς της κίνησης, με στόχο να κάνουμε τους υπολογισμούς μας όσο γίνεται απλούστερους. Συχνά, ως σύστημα αναφοράς παίρνουμε αυτό που συνδέεται με το κέντρο μάζας του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς, λ.χ, θα διευκόλυνε τη μελέτη της κίνησης των πυραύλων, που χωρίς αυτούς οι γνώσεις μας για το ηλιακό σύστημα θα ήταν πολύ φτωχότερες.

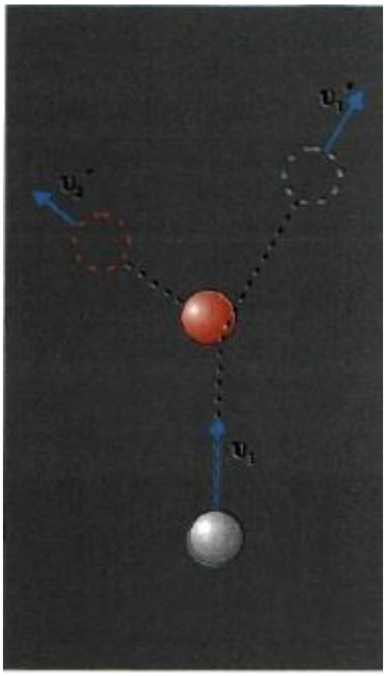
Εικ. 5.1 Εκτόξευση διαστημικού λεωφορείου

Τέλος, όχι μόνο η ταχύτητα των σωμάτων αλλά και η ταχύτητα των κυμάτων εξαρτάται από τη σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο κύμα. Το φαινόμενο Doppler, όπως είναι γνωστό, το αξιοποιούν για τη μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή των αεροπλάνων με το ραντάρ, οι αστρονόμοι για να παρακολουθήσουν την κίνηση πολύ μακρινών ουράνιων σωμάτων, αλλά και οι γιατροί για να παρακολουθήσουν τη ροή του αίματος.

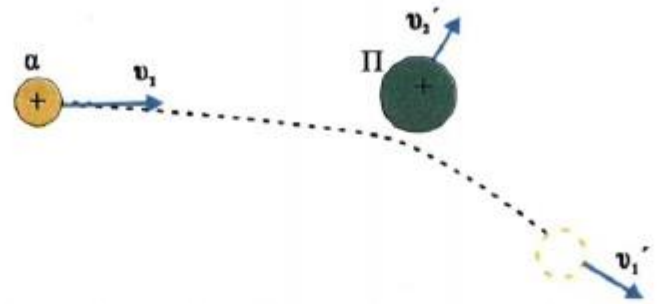
5-2 ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Όταν δύο σώματα συγκρούονται, για παράδειγμα όταν χτυπάνε δύο μπάλες του μπιλιάρδου (σχ. 5.1), η κινητική κατάστασή τους ή τουλάχιστον ενός από αυτά μεταβάλλεται απότομα. Οι απότομες αυτές αλλαγές της κίνησης προκαλούνται από τις ισχυρές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σώματα που συγκρούονται, κατά τη διάρκεια της επαφής τους.

Η έννοια της κρούσης έχει επεκταθεί και στο μικρόκοσμο όπου συμπεριλαμβάνει και φαινόμενα όπου τα "συγκρουόμενα" σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα όταν ένα σωματίδιο α (πυρήνας He) κινείται προς ένα άλλο πυρήνα (Π), οι αλληλεπιδράσεις τους, που είναι πολύ ασθενείς όταν βρίσκονται μακριά, γίνονται πολύ ισχυρές όταν τα σωματίδια πλησιάσουν με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή στην κινητική τους κατάσταση. Η χρονική διάρκεια μεταβολής της κινητικής τους κατάστασης είναι πολύ μικρή. Αν μπορούσαμε να κινηματογραφήσουμε το φαινόμενο θα βλέπαμε ότι μοιάζει με τη σύγκρουση δύο σωμάτων, μόνο που εδώ τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή. Ονομάζουμε, λοιπόν, κρούση και κάθε φαινόμενο του μικρόκοσμου, στο οποίο τα "συγκρουόμενα " σωματίδια, αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. Το φαινόμενο αυτό στη σύγχρονη φυσική ονομάζεται και **σκέδαση** (σχ. 5.2).



Σχ. 5.1 Κρούση ανάμεσα σε δύο μπάλες μπιλιάρδου.

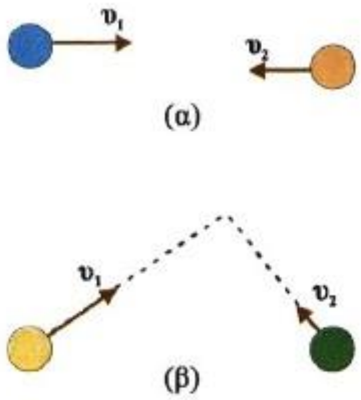


Σχ. 5.2 Κρούση ενός σωματίου α, με αρχικά ακίνητο πυρήνα.

Ανάλογα με τη διεύθυνση που κινούνται τα σώματα πριν συγκρουστούν οι κρούσεις διακρίνονται σε κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες.

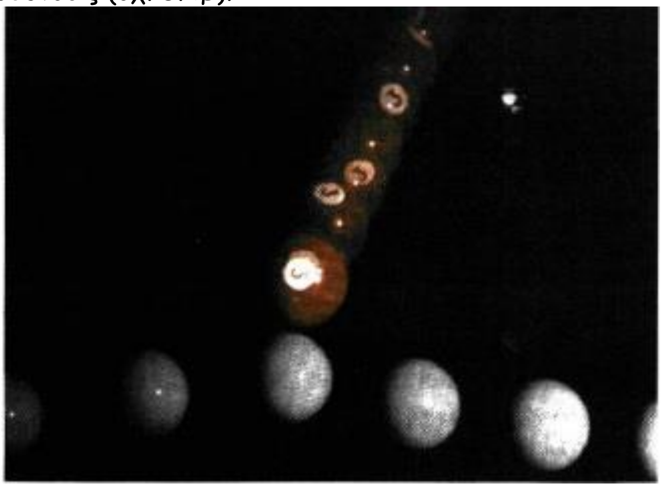
Κεντρική, (ή μετωπική) ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αν τα σώματα που συγκρούονται είναι σφαίρες και η κρούση τους είναι κεντρική, οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα βρίσκονται επίσης στην ίδια (αρχική) διεύθυνση (σχ. 5.3).

Σχ. 5.3 Κεντρική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών.



Σχ. 5.4 (α) έκκεντρη κρούση, (β) πλάγια κρούση..

Έκκεντρη, ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες (σχ. 5.4α).
Πλάγια ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις (σχ. 5.4β).



Εικ. 5.2 Πλάγια κρούση

Εικ. 5.3 Δύο σωμάτια α συγκρούονται. Το ένα, πριν την κρούση, ήταν πρακτικά ακίνητο

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις.
Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο, οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων - αν υπάρχουν - είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, για τη χρονική διάρκεια της κρούσης, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται.

1. **Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά τη διάρκεια της κρούσης, διατηρείται.**

Αν $\mathbf{p}_{πριν}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $\mathbf{p}_{μετα}$ η ορμή του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, ισχύει:

$$\mathbf{p}_{πριν}=\mathbf{p}_{μετά}$$

Η ενέργεια στις κρούσεις
Κατά τη σύγκρουση δύο σωμάτων ένα μέρος της μηχανικής τους ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Στην ιδανική περίπτωση που η μηχανική ενέργεια των σωμάτων δε μεταβάλλεται με την κρούση, η κρούση ονομάζεται ελαστική. Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο αμελητέας χρονικής διάρκειας, η δυναμική ενέργεια των σωμάτων -που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο- δε μεταβάλλεται. Επομένως :

1. **Ελαστική είναι η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων.**

Στο μακρόκοσμο η ελαστική κρούση αποτελεί μια εξιδανίκευση. Προσεγγιστικά ελαστική μπορεί να θεωρηθεί η κρούση ανάμεσα σε δύο πολύ σκληρά σώματα, όπως ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου. Στο μικρόκοσμο όμως έχουμε κρούσεις απολύτως ελαστικές όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως ανάμεσα στο σωμάτιο α και τον πυρήνα.

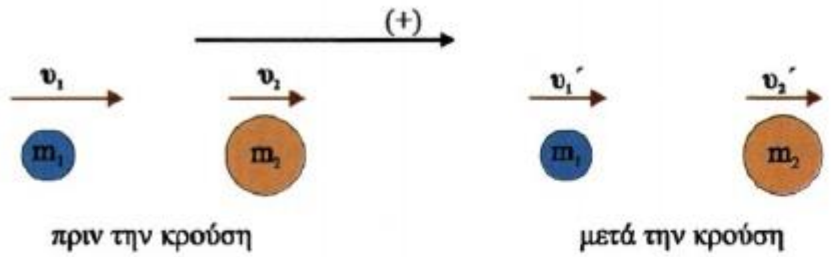
Εικ. 5.4 Η κρούση ανάμεσα στα αυτοκίνητα της εικόνας είναι σχεδόν πλαστική.

1. **Ανελαστική, ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.**

Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων - στη δημιουργία συσσωματώματος. Αυτή η κρούση ονομάζεται **πλαστική.**

5-3 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2, όπως στο σχήμα 5.5. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση έχουν ταχύτητες υ_1' και υ_2'. Εάν γνωρίζουμε τις ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση και τις μάζες τους μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητές τους μετά την κρούση.



Σχ. 5.5

Για την κρούση ισχύουν :

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$ (διατήρηση της ορμής) (5.1)

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$ (διατήρηση της κινητικής ενέργειας) (5.2)

η (5.1) γράφεται και

$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') + m_2(\upsilon_2 - \upsilon_2')$ (5.3)

ενώ η (5.2) γράφεται

$m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) + m_2(\upsilon_2'^2 - \upsilon_2^2)$ (5.4)

Διαιρούμε τις (5.4) και (5.3) κατά μέλη και βρίσκουμε

$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'$ (5.5)

Επιλύοντας το σύστημα των (5.1) και (5.5) ως προς υ_1' και υ_2' βρίσκουμε

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \qquad (5.6)$$

και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \qquad (5.7)$$

Σημείωση : Κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων των σφαιρών υποθέσαμε ότι οι σφαίρες μετά την κρούση συνεχίζουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν μετά τις πράξεις προκύψει αρνητική τιμή για την υ_1 θα συμπεράνουμε ότι η Σ_1 άλλαξε φορά κίνησης μετά την κρούση.

Στην περίπτωση όπου $m_1 = m_2$ οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$\upsilon_1' = \upsilon_2$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1$

Δηλαδή οι σφαίρες **ανταλλάσσουν ταχύτητες.**

Στην περίπτωση που η Σ_2 ήταν ακίνητη πριν την κρούση ($\upsilon_2 = 0$) οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$$\boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1} \qquad (5.8)$$

και

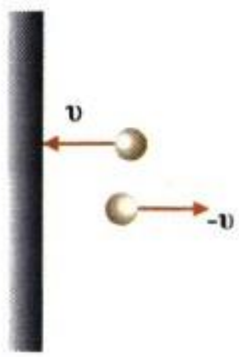
$$\boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1} \qquad (5.9)$$

5-4 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΛΛΟ ΑΚΙΝΗΤΟ ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΗΣ ΜΑΖΑΣ

Αν η σφαίρα Σ_2 της προηγούμενης παραγράφου έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη Σ_1 και είναι ακίνητη πριν την κρούση οι σχέσεις (5.8) και (5.9) δίνουν

$$\boxed{\upsilon_1' = -\upsilon_1}$$

$$\boxed{\upsilon_2' = 0}$$



Σχ. 5.6 Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Δηλαδή η σφαίρα μικρής μάζας ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας παραμένει πρακτικά ακίνητο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω όταν μια σφαίρα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου ή στο δάπεδο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς (σχ. 5.6).

Στην περίπτωση που η σφαίρα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε έναν τοίχο αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, τη μία ($υ_y$,) κάθετη στον τοίχο και την άλλη ($υ_v$) παράλληλη με αυτόν (σχ. 5.7).

Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($υ_x' = -υ_x$).

Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στον τοίχο, άρα η y συνιστώσα της ταχύτητας δε μεταβάλλεται ($υ_y' = υ_y$).

Το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση είναι

$$\upsilon' = \sqrt{\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \upsilon$$

δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας δε μεταβάλλεται.

Αν π και α οι γωνίες που σχηματίζουν η υ και η υ', αντίστοιχα, με την κάθετη στον τοίχο ισχύει

$$\eta\mu\pi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \qquad \text{και} \qquad \eta\mu\alpha = \frac{\upsilon_y'}{\upsilon'}$$

όμως $υ_y' = υ_y$ και $υ = υ'$

οπότε ημπ = ημα

και π= α

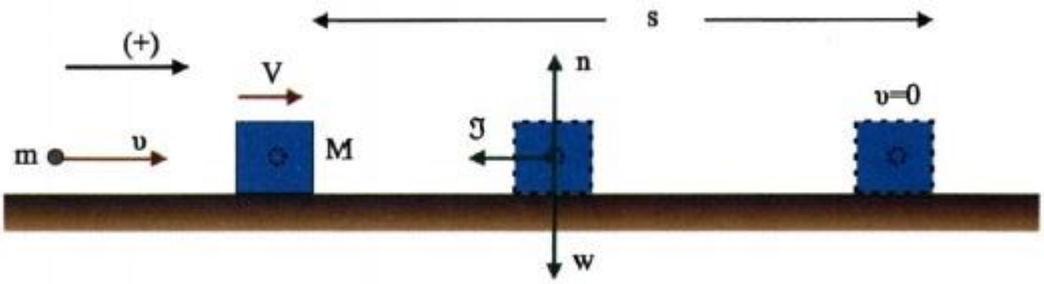
Δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης της σφαίρας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-1

Βλήμα μάζας m=0,02 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=200 m/s και σφηνώνεται σε ακίνητο ξύλο μάζας M= 0,98 kg που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί α) η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, β) η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση, γ) το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Ο συντελεστής τριβής του συσσωματώματος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $μ_κ$ = 0,5 και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.

Απάντηση :

α) Έστω **V** η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Σχ. 5.6 Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Συμβολίζουμε με $\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu}$ την ορμή του συστήματος αμέσους πριν την κρούση και με $\mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ την ορμή αμέσως μετά την κρούση.

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά (σχ. 5.8), η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται αλγεβρικά:.

$$m\upsilon = (M + m)V \text{ άρα } V = \frac{m\upsilon}{M+m} = 4\text{m/s}$$

β) Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι

$$K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}(M + m)V^2 = 392 \text{ J}$$

γ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για το συσσωμάτωμα έχουμε

$$K_{\alpha\rho\chi} + W_w + W_n + W_3 = K_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή } \frac{1}{2}(M + m)V^2 - \mu_\kappa (M + m) gs = 0 \text{ άρα}$$

$$s = \frac{V^2}{2\mu_K g} = 1{,}6\text{m}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-2

Δύο σώματα με μάζες m_1=2 kg και m_2=3 kg κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες υ_1=10m/s και υ_2=5 m/s και κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται από την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων.

Απάντηση :

Έστω **V** η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Αν $\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $\mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ η ορμή αμέσως μετά την κρούση θα είναι

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$$

Αναλύουμε το διάνυσμα **V** σε δύο συνιστώσες τη V_x κατά την διεύθυνση x και τη V_y κατά τη διεύθυνση y (σχ. 5.8). Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως

$$\mathbf{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \text{ άρα } \begin{matrix} p_x^{\pi\rho\iota\nu} = p_x^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \\ p_y^{\pi\rho\iota\nu} = p_y^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V_x \\ m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V_y \end{matrix}$$

$$V_x = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2} = 4m/s \quad \text{και} \quad V_y = \frac{m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2} = 3m/s \ \text{και}$$

από όπου βρίσκουμε

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = 5m/s \quad \text{και} \quad \varepsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3}{4}$$