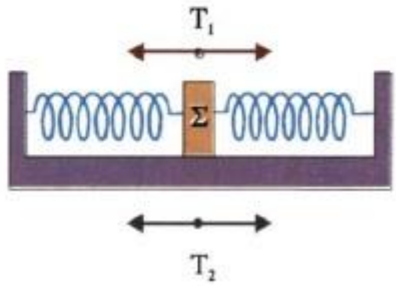
1-7 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Το σώμα Σ του σχήματος 1.34 βρίσκεται πάνω σε οριζόντια βάση και είναι δεμένο στις άκρες δύο ελατηρίων, οι άλλες άκρες των οποίων είναι στερεωμένες σε ακίνητα σημεία. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_1). Αν και η βάση πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα -με κατάλληλο μηχανισμό- εκτελεί αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_2), το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις. Η ταλάντωση της βάσης δεν είναι απαραίτητο να γίνεται στη διεύθυνση της ταλάντωσης του σώματος.



Σχ. 1.34 Το σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δυο ταλαντώσεις.

Η κίνηση του σώματος Σ είναι, γενικά, πολύπλοκη. Η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση της εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επί μέρους ταλαντώσεων.

Η κίνηση που κάνει το σώμα λέγεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **σύνθεση ταλαντώσεων**.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις σύνθεσης ταλαντώσεων.

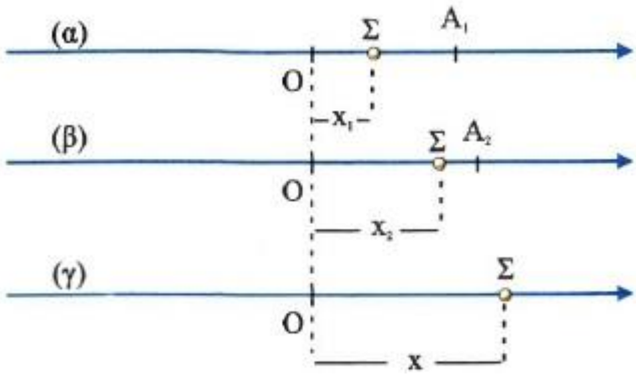
1. ***Α. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.***

Έστω ότι ένα σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις με εξισώσεις

$x_1=A_1\eta\mu\omega t$ (1.22)(Σχ.1.35α)

$x_2=A\eta\mu(\omega t+\varphi)$ (1.23)(Σχ.1.35β)

Σχ. 1.35 Το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις αρμονικές ταλαντώσεις (α) και (β). Η απομάκρυνσή του κάθε στιγμή είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων του στις επιμέρους ταλαντώσεις στις οποίες μετέχει (γ).

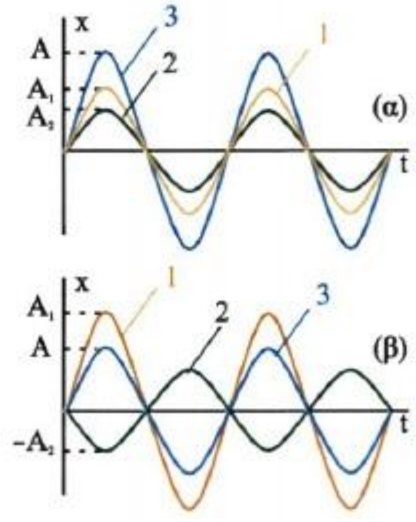


Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων, η απομάκρυνση του σώματος κάθε στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν έκανε την κάθε ταλάντωση ξεχωριστά (σχ. 1.35γ), δηλαδή

$$x=x_1+x_2 \qquad (1.24)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις (1.22) και (1.23) η (1.24) γίνεται

$$x=A_1\eta\mu\omega t+A_2\eta\mu(\omega t+\varphi) \qquad (1.25)$$



Σχ. 1.36 (α) Από τη σύνθεση των ταλαντώσεων 1 και 2 που έχουν την ίδια φάση, προκύπτει η ταλάντωση 3. (β) Από τις ταλαντώσεις 1 και 2 που παρουσιάζουν διαφορά φάσης 180° προκύπτει η ταλάντωση 3.

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x = A\eta\mu(\omega t+\theta) \qquad (1.26)$$

όπου,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\,\varphi} \qquad (1.27)$$

και

$$\varepsilon\varphi\,\vartheta = \frac{A_2\,\eta\mu\,\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\,\varphi} \qquad (1.28)$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από την (1.26) είναι ότι το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο Ο, με την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα. Το πλάτος και η αρχική φάση της ταλάντωσης εξαρτώνται από τα στοιχεία των επί μέρους ταλαντώσεων.
Στην ειδική περίπτωση που φ = 0 (σχ. 1.36α). οι σχέσεις (1.27) και (1.28) δίνουν $A=A_1+A_2$ και θ=0 δηλαδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι ισο με το άθροισμα των πλατών και η φάση της είναι ίδια με τη φάση των επιμέρους ταλαντώσεων.
Όταν φ=180°, πάλι από (1.27) και (1.28), προκύπτει ότι $A=|A_1-A_2|$ και θ = 0 ή θ=180° (σχ. 1.36β), δηλαδή το πλάτος είναι ίσο με τη διαφορά των πλατών και η φάση ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος.

1. **Β.Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες.**

Έστω ότι το σώμα Σ μετέχει στις ταλαντώσεις
$x_1=A\eta\mu\omega t$ (1.29)(Σχ.1.35α)
$x_2=A\eta\mu(\omega t+\varphi)$ (1.30)(Σχ.1.35β)

Και στην περίπτωση αυτή, η απομάκρυνση του σώματος κάποια στιγμή θα είναι
$x=x_1+x_2$ (1.31)(Σχ.1.35γ)

η οποία από τις (1.29) και (1.30) γίνεται
$x=A\eta\mu\omega_1 t+A\eta\mu\omega_2 t$ (1.32)

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

η (1.32) γίνεται

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \qquad (1.33)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η κίνηση του σώματος είναι πολύπλοκη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κίνηση στην περίπτωση που οι δύο επιμέρους γωνιακές συχνότητες διαφέρουν πολύ λίγο. Τότε ο παράγοντας

$$A' = 2A\text{συν}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \qquad (1.34)$$

της σχέσης (1.33) μεταβάλλεται με το χρόνο πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$ ο οποίος μεταβάλλεται με γωνιακή συχνότητα $\overline{\omega}$ ίση με τη μέση τιμή των ω_1 και ω_2 ειδή αυτές διαφέρουν ελάχιστα μπορούμε να γράψουμε $\overline{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

Επομένως η (1.33) μπορεί να γραφεί

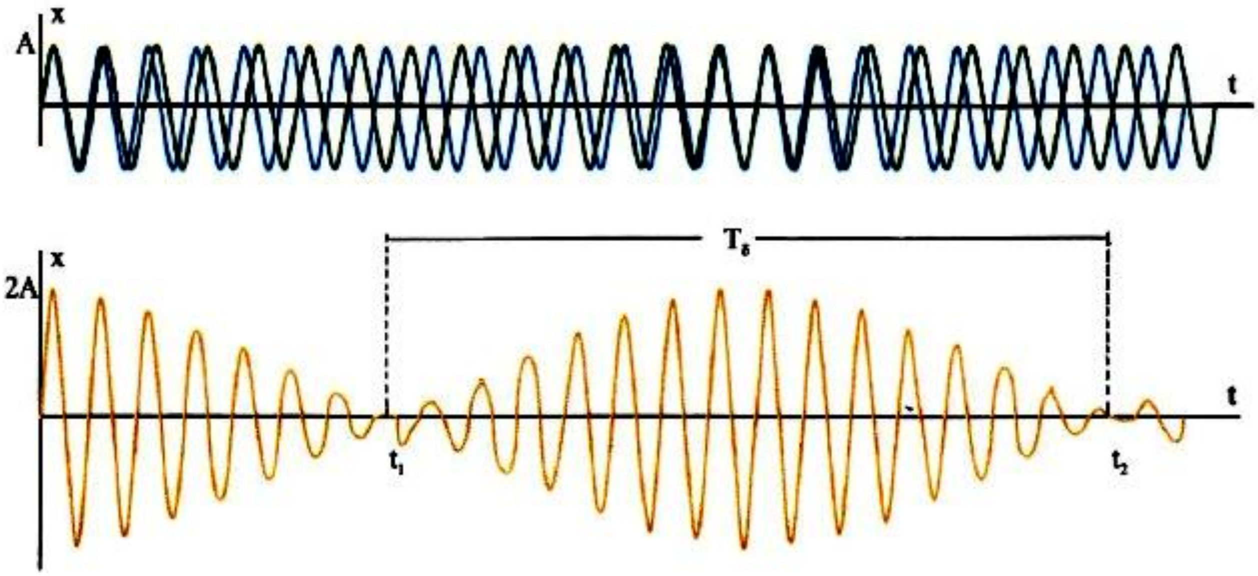
$$x = A'\text{ημ}\omega t \qquad (1.35)$$

Η σχέση (1.35) περιγράφει μια ιδιόμορφη ταλάντωση που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επί μέρους ταλαντώσεις.

Το πλάτος $|A'|$ της κίνησης του Σ μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι 2Α.

Λέμε ότι η κίνηση του Σ παρουσιάζει **διακροτήματα** (σχ. 1.37).

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους ονομάζεται περίοδος ($T_δ$) των διακροτημάτων.



Σχ. 1.37 Από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο (πράσινη και μπλε γραμμή) προκύπτει ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (κόκκινη γραμμή) που παρουσιάζει διακροτήματα.

Υπολογισμός της περιόδου των διακροτημάτων

Το πλάτος A' μηδενίζεται όταν $\text{συν}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t_1\right) = 0$.

Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t = (2K+1)\frac{\pi}{2}$

όπου K = 0,1,2,…………………

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι οι t_1 και t_2 (σχ. 1.37) για τις οποίες

$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2} t_1 = \frac{\pi}{2}$ ή $t_1 = \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

και $\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2} t_2 = 3\frac{\pi}{2}$ ή $t_2 = 3\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

Η **διαφορά** *t_2 - t_1* είναι η **περίοδος των διακροτημάτων.**

Είναι επομένως

$$T_\delta = t_2 - t_1 = \frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|} = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

ή

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1-f_2|}$$

ή

$$\frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{|f_1-f_2|}$$

και τελικά

$$\boxed{f_\delta = |f_1-f_2|}$$